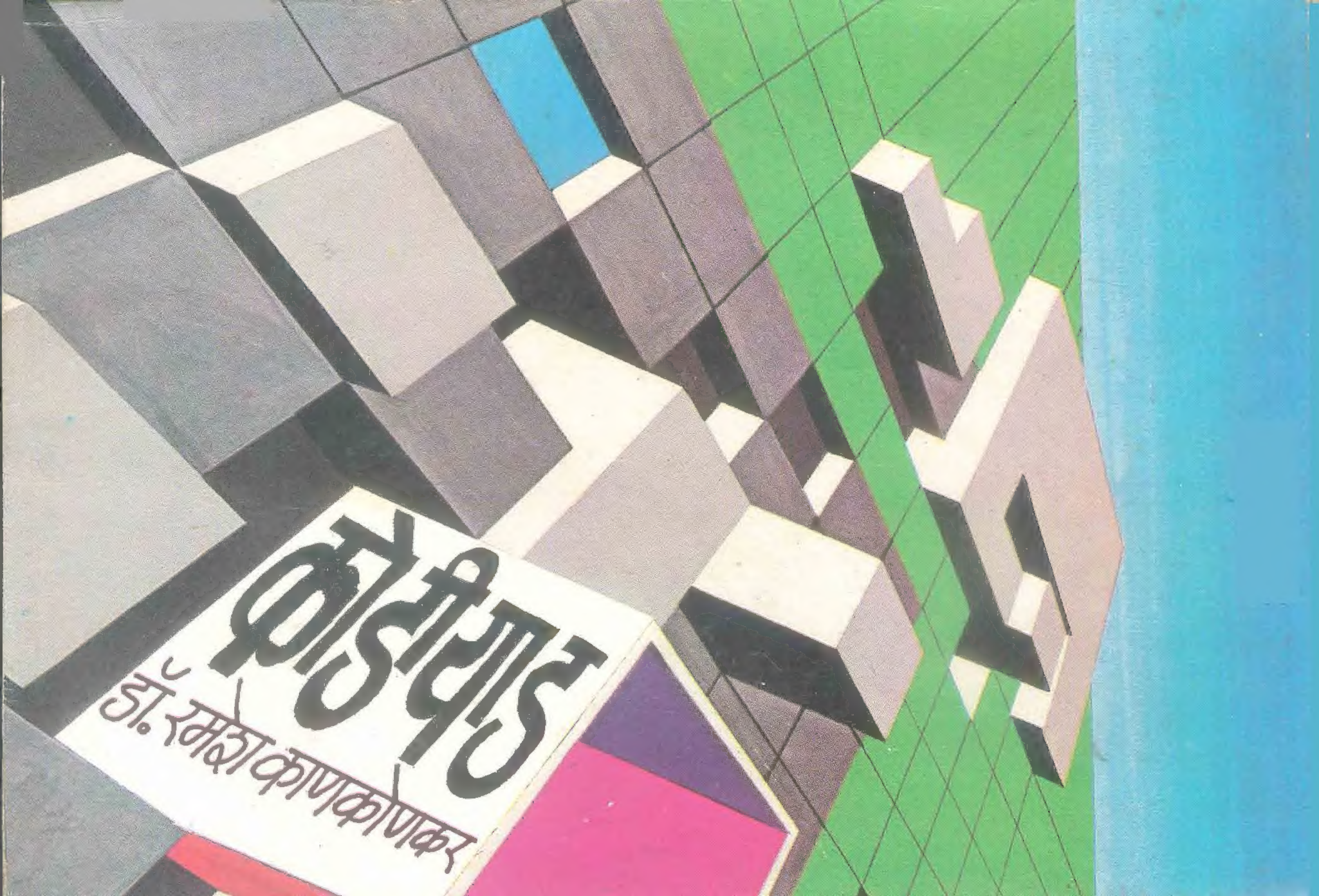

कोडींग
डॉ. रमेश काणकोणकर

क्रोडीयाड

डॉ. रमेश काणकोणकर



त्रिदल प्रकाशन
राणी बिल्डिंग, प्रार्थना समाजजवळ, गिरगाव, मुंबई-४०० ००४.

प्रथमावृत्ती : १९९४

प्रकाशक :
प्र. म. टिळक
त्रिदल प्रकाशन
प्रार्थना समाजजवळ
गिरगाव, मुंबई-४०० ००४.

अक्षरजुळणी :
अक्षय फोटोटाईपसेटर्स
चित्रकूट सोसायटी
डॉ. आंबेडकर मार्ग,
न्यू शक्ती डाय वर्क्ससमोर
ठाणे (प)-४०० ६०१

मुद्रक - **संजय ढोले**
टाफिक ग्राफिक
गाळा न. १ स्वस्तिक मिल
कंपाऊंड लोअर परेल - मुंबई - १३

बाराव्या शतकात होऊन गेलेल्या

भास्कराचार्य

या थोर भारतीय गणितीच्या स्मृतीस

हे पुस्तक सादर अर्पण.

या 'याड'विषयी

'ऑलिम्पियाड' हा शब्द तुम्हा सर्वांच्या परिचयाचा असेल. ऑलिम्पियाड म्हणजे ऑलिम्पिक खेळांचा उत्सव किंवा समारंभ. झ्यूस नावाच्या देवाच्या सन्मानार्थ खेळांच्या स्पर्धा आयोजित करून पुरातन काळी ग्रीसमधील 'ऑलिम्पिया' शहरात हा सण मोठ्या थाटात पार पाडला जाई. समारंभाची सुरुवातच मुळी धावण्याच्या स्पर्धेने होई. कारण त्या उत्सवात झ्यूसची माता रीआ हिला मेजवानी देण्याची प्रथा होती. देवीच्या वेदीसमोर यज्ञकुंड पेटवून त्यात जनावराची आहुती दिली जाई. यज्ञकुंडात शिजवलेले मांस नंतर अन्न म्हणून मेजवानीत वाढले जाई. यज्ञकुंड पेटविण्याचा मान सर्वोत्कृष्ट धावपटूला दिला जाई. त्यासाठी धावपटूंना एक 'स्टेड' म्हणजे सुमारे १९२.२८ मीटर किंवा २१०.२३ यार्ड अंतर धावत जाऊन वेदीपर्यंत पोहोचावे लागे. जो कोणी सर्वप्रथम वेदीपर्यंत पोहोचे त्याच्या हाती ग्रीक पुजारी पेटती मशाल देऊन त्याच्याकरवी यज्ञकुंड पेटवून घेई. त्यानंतर इतर खेळांच्याही स्पर्धा होत. कालांतराने या समारंभाचे धार्मिक स्वरूप कमी होऊन स्पर्धांनाच प्राधान्य मिळाले. स्पर्धा जिंकण्यासाठी स्पर्धक काहीही करू लागले. त्यातून अनिष्ट गोष्टी घडू लागल्या, अनीतीचा कहर झाला; परिणामी स्पर्धांचे मूळचे निकोप स्वरूप नष्ट होऊन त्यांना बाजारी रूप आले. शेवटी ख्रिस्ताब्द ३९३ मध्ये थिओडोसियस या रोमन बादशहाने या स्पर्धांवर बंदी घातली. वास्तविक या स्पर्धांमागे व्यक्तींच्या शरीराचा आणि बुद्धीचा सुसंगतपणे विकास घडावा असाच उद्देश होता.

जगातील हौशी क्रीडापटूंना एकत्र कसे आणता येईल, त्यांच्या स्पर्धा घेऊन त्यांच्यातील विजेते (चॅम्पियन) कसे ठरविता येतील, क्रीडाक्षेत्रातील धंदेवाईकपणाला लगाम कसा घालता येईल याचा ध्यास घेतलेल्या बॅरॉ पिएर

द कुरबर्त्यॅं या उमद्या मनाच्या एका फ्रेंच उमरावाच्या लक्षात जेव्हा ऑलिम्पियाड स्पर्धामागील उद्देश आला तेव्हा त्याने ऑलिम्पियाडचे पुनरुज्जीवन घडवून आणले. १८९६ मध्ये आधुनिक ऑलिम्पिक स्पर्धांना जी सुरुवात झाली ती आजतागायत चालू आहे.

या स्पर्धांतील खेळाडूंची शिस्त, जिद्द, कल्पकता, क्षमता, सहनशीलता, धडाडी, मनोधैर्य, चापल्य, नैपुण्य पाहून लोक भारावून गेले. केवळ 'ऑलिम्पियाड' या एका शब्दाने ते वेडे होऊ लागले. साहजीकच १९५१ मध्ये दिल्ली येथे जेव्हा आशियातील राष्ट्रांनी क्रीडास्पर्धा भरवल्या तेव्हा त्यांनी स्पर्धांना 'एशियाड' असेच म्हटले. मागल्या एशियाड सामन्यात भारतात वापरलेल्या बसेस जेव्हा महाराष्ट्राच्या महामार्गावर धावू लागल्या तेव्हा त्यांना 'आरामगाडी' म्हणण्याऐवजी महाराष्ट्र-जनतेने त्यांचे 'एशियाड' म्हणूनच स्वागत केले. पुढे 'खेळीयाड'या नावाखाली दूरदर्शनवर खेळ-क्रीडा संबंधीच्या प्रश्नोत्तरांचा कार्यक्रम दाखवण्यात येऊ लागला. अलीकडे गणिताच्या 'ऑलिम्पियाड' स्पर्धा सुरू झाल्या. हे सारे पाहून मी या पुस्तकाला 'कोडीयाड' असे शीर्षक दिले आहे. शिवाय महाराष्ट्राला अनेक गोष्टींचे 'यॅड' किंवा 'याड' आहेच तेव्हा कोड्यांचा नाद, कोड्यांचा छंद, कोड्यांचं यॅड किंवा कोड्यांचं याड या अर्थाने या पुस्तकाला 'कोडीयाड' म्हणणे वावगे ठरू नये. 'कोड्यांचा उत्सव' म्हणूनही या पुस्तकाकडे पाहता येईल.

या पुस्तकातील कोडी 'कोड्यांची जत्रा', 'कोड्यांचा खजिना', 'आव्हान कोड्यांचे' आणि 'कूटरंजन' या 'त्रिदल' मार्फत प्रकाशित झालेल्या माझ्या अगोदरच्या पुस्तकांतील कोड्यांच्या मानाने काहीशी कठीण आहेत. ती सोडविताना बुद्धीचा चांगलाच कस लागणार आहे आणि कोडी सोडविण्याची हौस असणाऱ्यांना ती आगळा आनंद देणार आहेत. अर्थात ही कोडी सोडविण्यासाठी गणितात फार गती असली पाहिजे असे नाही.

तर्कसुसंगत विचार, व्यवहारज्ञान आणि गणिताचे जुजबी ज्ञान एवढ्या भांडवलावर ही सारी कोडी सुटण्यासारखी आहेत.

असे हे 'कोडीयाड' सुंदर, आकर्षक आणि निर्दोष पुस्तकाच्या रूपात वाचकांच्या हाती पडावे यासाठी प्रकाशक श्री. प्र. म. तथा बापू टिळक, अक्षय फोटोटाइपसेटर्सचे सर्वश्री फडके बंधू, चित्रकार सर्वश्री आनंद कांदळगावकर आणि विकास फडके व मुद्रितशोधक श्री. विवेक फडके यांनी जे परिश्रम घेतले त्याबद्दल मी त्या सर्वांचा आभारी आहे.

हनुमान जयंती — डॉ. रमेश काणकोणकर
एप्रिल २५, १९९४.

अनुक्रमणिका

१. फुले

चंपाकडे जितकी फुले होती तितकीच फुले गुलाबकडे होती. परंतु चंपाने सहा-सहा फुलांचा एक गुच्छ बांधल्याने तिच्याकडे शेवटी एक फूल उरले,



तर गुलाबने सहाऐवजी पाच-पाच फुलांचा एक गुच्छ केल्याने तिच्याकडे शेवटी दोन फुले उरली. फुलांची संख्या १० ते ५० च्या दरम्यान असल्यास प्रत्येकीकडे सुरुवातीला किती फुले होती?



२. झुलवाचा कपडालत्ता

मानाशेठकडे घरकाम करणाऱ्या झुलवाला शेठ दरवर्षी ठराविक किंमतीचा कपडालत्ता करत आणि तिच्या आई-वडिलांना रोख १५०० रुपये देत. एका वर्षी ७ महिने नोकरी केल्यावर झुलवाचे लग्न ठरल्याने



तिने नोकरी सोडली. तेव्हा तिच्या कामाचे मानाशेठनी रोख ८०० रुपये मोजले व ठरल्याप्रमाणे दरवर्षीचा कपडालत्ता दिला, तर झुलवाच्या कपड्यालत्त्याची किंमत काय?



३. भास्करचे बिल

परीक्षेचा शेवटचा पेपर दिल्यावर ते सात विद्यार्थी महाविद्यालयाच्या उपाहारगृहात गेले आणि त्यांनी काही अल्पोपाहार व चहा घेतला.

उपाहारगृह-व्यवस्थापकाने त्यांचे बिल एकत्र देऊनही प्रत्येकाने आपापल्या वाट्याचे पैसे स्वतंत्ररीत्या दिले. भास्कर नेहमीच जास्त खाणारा असल्याने त्याला सरासरी बिलापेक्षा ६ रुपये जास्त मोजावे लागले. बिलाचा

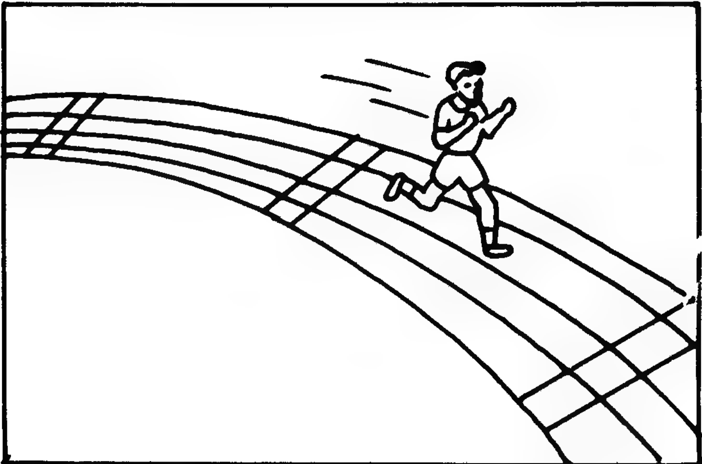


भरणा करताना इतर ६ विद्यार्थ्यांनी प्रत्येकी १५ रुपये मोजलेले असल्यास भास्करला बिलापोटी किती रुपये द्यावे लागले?

* * *

४. मास्टर फेणेचा सरासरी वेग

एक मैलाच्या शर्यतीत धावताना मास्टर फेणे या धावपटूने शर्यतीचे



पहिले निम्मे अंतर केवळ १०० सेकंदांत पार केले. त्यापुढचे पाव मैलाचे अंतर पार करताना त्याचा सरासरी वेग ताशी १५ मैल होता आणि शेवटचे पाव मैलाचे अंतर तोडताना त्याचा सरासरी वेग सुरुवातीचे अर्ध्या मैलाचे अंतर पार करतानाच्या वेगाच्या केवळ ५/९ पट होता.

तर शर्यतीतील पूर्ण अंतर पार करताना त्याचा सरासरी वेग काय होता?



५. द्रोणातील बोरे

रानात यथेच्छ बोरे खाऊन झाल्यावर बहिणीसाठी काही टपोरी बोरे पानाच्या द्रोणात घेऊन बज्या घरी निघाला. परंतु लगबगीने घरी यायच्या

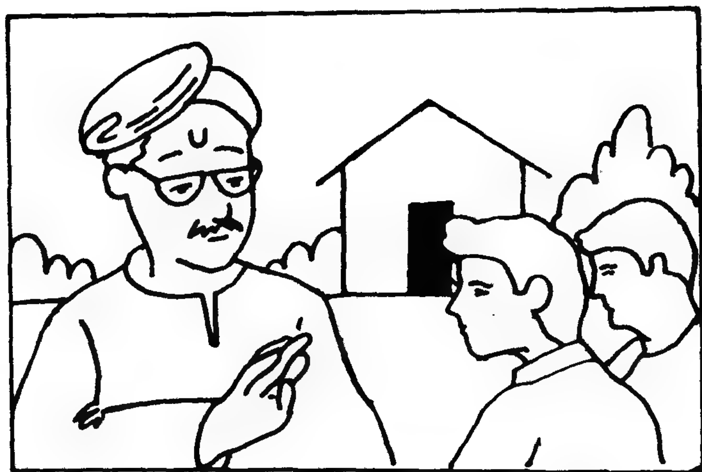


नादात एक लहानसा ओढा ओलांडताना त्याचा पाय घसरला आणि हातातील द्रोण ओढ्यात पडून सारी बोरे पाण्याबरोबर वाहून गेली. घरी आल्यावर द्रोणात किती बोरे होती असे त्याच्या बहिणीने त्याला जेव्हा

विचारले तेव्हा आपण द्रोणात नेमकी किती बोरे घेतली होती हे त्याला आठवेना. पण डोक्याला थोडासा ताण दिल्यावर त्याच्या लक्षात आले की बोरे दोन-दोन करून मोजली असता एक बोर उरले होते. तीन-तीन करून मोजली असताही एक बोर उरले होते. आणि हो, चार-चार करून मोजली असताही एकच बोर उरले होते. परंतु बज्याने जेव्हा पाच-पाच करून बोरे मोजली होती तेव्हा एकही बोर उरले नव्हते. तर बज्याने द्रोणात किती बोरे घेतली होती ?

❋ ❋ ❋

६. पाहा हं, चुकाल!



'मुलांनो, अशी एक चार अंकी संख्या शोधून काढा की जिचा पहिला अंक शेवटल्या अंकाच्या दुप्पट असेल, दुसरा अंक तिसऱ्या अंकाच्या दुप्पट असेल आणि पहिल्या व शेवटल्या अंकांची बेरीज दुसऱ्या अंकाच्या दुप्पट असेल.' चौधरी गुरुजींच्या या कोड्याचे उत्तर काय ?

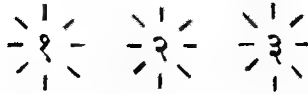
❋ ❋ ❋

७. अष्टपैलू अंक

मेहुलकुमार सुपर्णाला म्हणाला, 'सुपर्णा, आपले अंक किती अष्टपैलू आहेत हे माहीत आहे का तुला? अग ६ हा अंक आठ वेळा वापरून मी एक हजार सहज मिळवू शकतो. पण जास्त कशाला सांगत बसू, तूच पाहा ना!' असे पुढे म्हणत त्याने ६ हा अंक पुढीलप्रमाणे आठदा मांडला.

$$\frac{६६६६ - ६६६}{६} = १०००.$$

नंतर तो म्हणाला, 'सुपर्णा, वरील पद्धतीचा अवलंब केला तर उरलेल्या इतर १ ते ९ पर्यंतच्या अंकांचा एकावेळी आठदा वापर करून आपणाला



एक हजार मिळविता येतील हे मी तुला सांगायला नको. परंतु याहून वेगळ्या पद्धतीने ६ हा अंक सोडून १ ते ९ पर्यंतचे अंक एकावेळी आठदाच मांडून एक हजार मिळवायचे म्हटले तर ते कसे मिळवता येतील?'

तुम्हाला काय वाटतं?



८. बगारामांचे वय

फालतू गप्पांत एक क्षणही न दवडता सदैव चोख काम करणाऱ्या बगारामांचा कार्यालयात भलताच वचक होता. त्यांच्या कामात व्यस्त राहण्याच्या सवयीमुळे की काय कोण जाणे, पण ते नेहमी हसतमुख,

तरतरीत आणि उत्साही दिसत. त्यांना निरुत्साही, हताश झालेले किंवा मरगळलेले पाहिल्याचे कुणाला आठवत नव्हते. म्हणूनच त्यांच्या चेहऱ्यावरून त्यांच्या वयाची अटकळ बांधणे कठीण होते. एकदा थोरल्या साहेबांचा निरोप-समारंभ आटपून घरी परतताना काही स्त्री कर्मचाऱ्यांनी भीतभीतच, पण मोठ्या उत्कंठेने बगारामांना त्यांचे वय विचारले. बगारामांनी



त्या स्त्रियांच्या मनात काय होते हे नेमके हेरले आणि त्यांना कोड्यात टाकायच्या उद्देशाने ते म्हणाले, 'पाच वर्षांनंतर होणाऱ्या माझ्या वयाच्या पाचपटीतून पाच वर्षांपूर्वीच्या माझ्या वयाची पाचपट वजा केली की माझे आजचे वय मिळते!' त्या स्त्रियांना यावरून काही बोध झाला की नाही हे ठाऊक नाही, पण तुम्हाला तरी बगारामांचे वय कळले का?



९. निरावयवांनी बनलेला जादूचा चौरस

सोबत ३ × ३ चा एक जादूचा चौरस दिलेला आहे. त्यातील तीन घरांत निरावयव लिहिलेले आहेत आणि उरलेली सहा घरे रिकामी आहेत. तेव्हा रिकाम्या घरांतही निरावयवी संख्या अशा पद्धतीने लिहा की उभ्या स्तंभांत

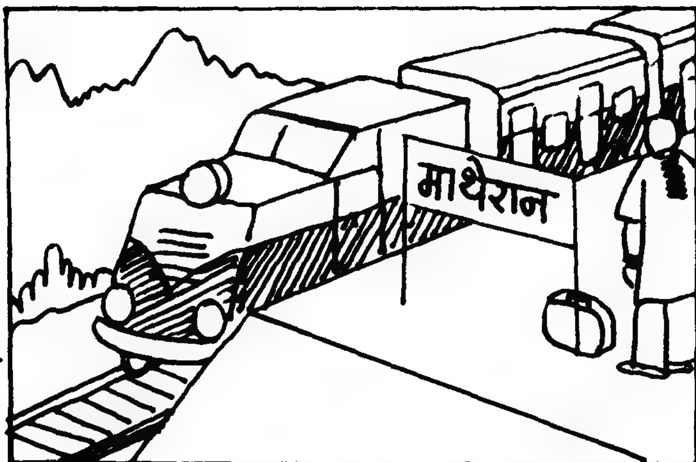
	१	४३
३१		

येणाऱ्या, आडव्या रांगेत येणाऱ्या आणि कर्णांवर येणाऱ्या घरांतील संख्यांची बेरीज सारखीच होईल आणि जादूचा चौरस पूर्ण होईल. चला तर, बसा कोडे सोडवायला!



१०. शतरूपाचे वास्तव्य

थंड हवेच्या ठिकाणी सुटी घालवून घरी परतताना शतरूपाच्या लक्षात आले की तिच्या तेथील वास्तव्यात एकूण १५ दिवस पाऊस पडला होता. पण गंमत अशी की ज्या ज्या संध्याकाळी पाऊस पडला, त्या त्या दिवशी सकाळी आकाश अगदी निरभ्र असायचे आणि ज्या ज्या सकाळी पाऊस कोसळला, त्या त्या दिवशीच्या संध्याकाळी स्वच्छ ऊन पडलेले असायचे. तिला आठवले की, तिच्या तेथील वास्तव्यात एकूण ११ दिवस सकाळचे



आभाळ निरभ्र होते आणि १४ संध्याकाळी स्वच्छ ऊन पडलेले होते. तर शतरूपाचे थंड हवेच्या ठिकाणचे वास्तव्य किती दिवसांचे होते?



११. साखरेची खरेदी

कार्यालयीन विभागाच्या स्नेह-संमेलनाची जबाबदारी अंगावर घेतलेल्या श्रीमती माधुरी साखरेने अल्पोपाहाराच्यावेळी गोडधोड पदार्थ तयार करून वाढण्यासाठी चांगली जाड दाणेदार साखर ९ रु. २० पैसे किलो या भावाने विकत घेतली. घरी परतताना कोपऱ्यावरील वाण्याच्या दुकानाकडे तिचे सहज लक्ष गेले तर त्या दुकानातील साखरेचा भाव किलोमागे ४० पैशांनी कमी असल्याचे तिला दिसून आले.



तिने मनोमन हिशेब केला तेव्हा तिला कळून चुकले की तिने जेवढ्या रकमेची साखर घेतली होती तितक्याच रकमेत तिला वाण्याकडील कमी किंमतीच्या दरात १ किलो साखर जास्त मिळाली असती.

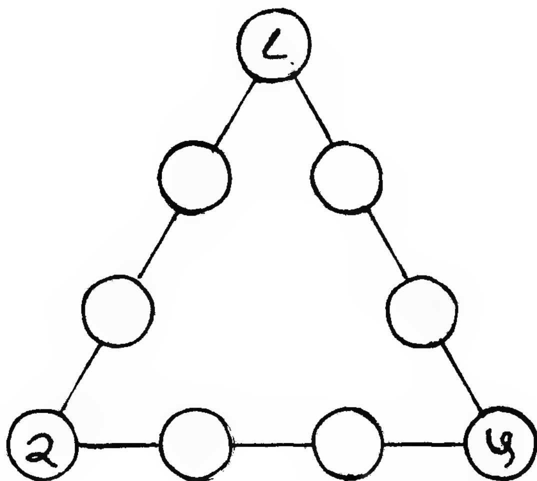
तर तिने किती रुपयांची साखर घेतली होती?



१२. प्रत्येक बाजूवरील बेरीज वीस

चौधरी गुरुजींनी फळ्यावर एक समभुज त्रिकोण काढला. नंतर त्यात सोबतच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे नऊ गोळे काढले आणि शिरोबिंदूवरील गोळ्यांत अनुक्रमे ८, २ आणि ५ हे अंक लिहिले.

नंतर ते मुलांकडे वळून म्हणाले, 'मुलांनो, २, ५ आणि ८ हे अंक वगळून १ ते ९ पर्यंतचे इतर सहा अंक आता उरलेल्या रिकाम्या सहा



गोळ्यांत अशा रीतीने मांडा की प्रत्येक बाजूवरील गोळ्यांतील अंकांची बेरीज वीस होईल.'



१३. अज्ञात अंक

कोमला हर्षाला म्हणाली, 'हर्षा, ९, ५ आणि आणखी एक अंक मिळून अशी एक तीन अंकी संख्या बनते की तिच्यातून तीच संख्या उलट क्रमाने लिहून वजा केली असता मिळणाऱ्या उत्तरात पुन्हा तेच तिन्ही अंक आणखी एका वेगळ्या क्रमाने येतात. तर तो 'आणखी एक अज्ञात अंक' कोणता हे तू सांगू शकशील का?'



हा 'आणखी एक अज्ञात अंक' जाणून घेण्यासाठी तुम्ही हर्षाला मदत कराल का?



१४. धेनुदासांचा धनादेश

काल जेव्हा धेनुदास मला बँकेत भेटले तेव्हा त्यांनी त्यांचा धनादेश (cheque) नुकताच वटविला होता. आम्ही बोलत बँकेबाहेर आलो तोच धेनुदासांनी निवडणुकीचे ताजे निकाल जाणण्यासाठी २० पैसे देऊन 'पुरवणी' घेतली आणि किती पैसे उरले आहेत हे पाहायला खिशात हात घातला आणि, त्यांचा चेहराच बदलला. त्यांचा खिसा कोणीतरी कापला होता असे मात्र तुम्ही समजू नका हं! कारण धेनुदास मला म्हणाले, 'अहो, बँकेतून आता पैसे काढले ना, त्याच्या चक्क दुप्पट पैसे आता माझ्या खिशात आहेत आणि गंमत म्हणजे घरून जेव्हा मी निघालो तेव्हा माझ्या



खिशात एक पैसाही नव्हता.' 'नीट आठवा बुवा!' मी म्हणालो. त्यावर धेनुदास म्हणाले, 'बहुतेक बँकेतील रोखपालानेच चूक केलेली दिसते. मला वाटतं, मी धनादेशावर जितके रुपये लिहिले होते तितके सुटे पैसे त्यांनी मला दिले आणि पैसे लिहिले होते तितके रुपये दिले.'

चौकशी करायला धेनुदास पुन्हा बँकेत गेले आणि त्यांचे म्हणणे खरे ठरले.

तर धेनुदासांचा धनादेश किती रुपयांचा होता?

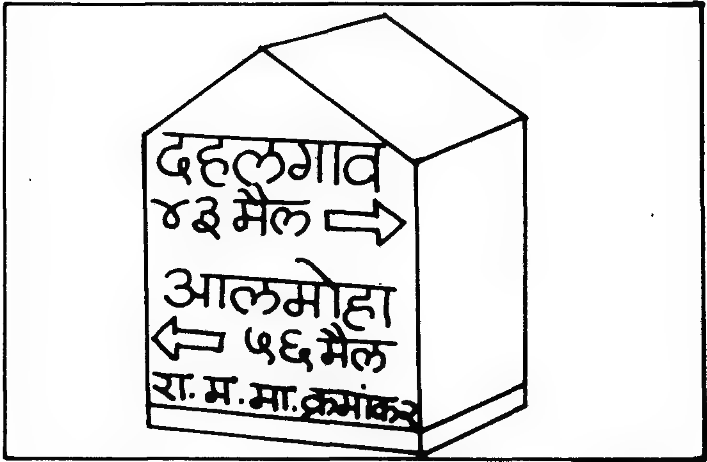


१५. मैलाचे दगड

बाना राज्यात दहलगाव आणि आल्मोहा ही दोन शहरे राज्याच्या महामार्गावर वसलेली असून त्यांच्यातील अंतर नेमके ९९ मैलांचे आहे.

महामार्गाच्या दर मैलावर मैलाचे दगड बसविलेले असून त्या त्या दगडापासून ही दोन्ही शहरे किती दूर आहेत हे दाखविलेले आहे.

उदाहरण म्हणून मैलाचा हा दगड पाहा.



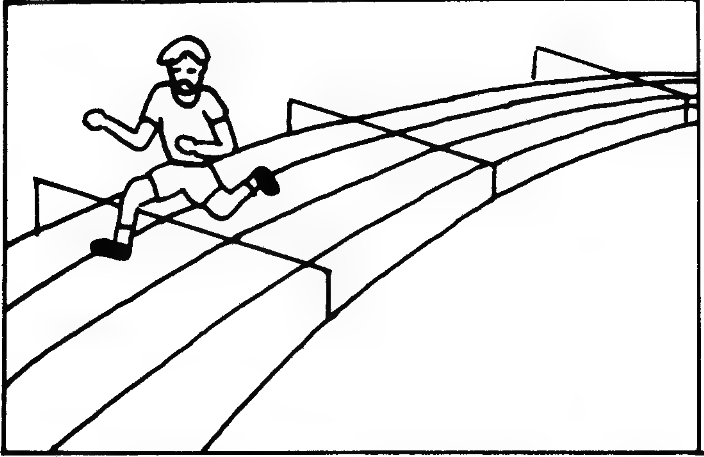
या दगडावरील मैल दाखविणारे आकडे जर तुम्ही नीट पाहिले तर तुमच्या लक्षात येईल की प्रत्येक आकड्यातील अंक वेगवेगळे आहेत. इतकेच नव्हे, तर चारी अंकही वेगळे आहेत.

यावरून (अ) फक्त एकच एक अंक असलेले आणि (ब) दोन वेगवेगळे अंक असलेले मैलाचे किती दगड या दोन शहरांच्या दरम्यान आहेत हे तुम्ही सांगू शकाल का?



१६. दोन अडथळ्यांतील अंतर

आंतरराज्य स्पर्धांतील कुमार गटातली अडथळ्याची शर्यत पी. मुरुगन जिंकणार हे ठरल्यासारखे होते. सारे क्रीडा-जगत त्याला शिस्तप्रिय, जिद्दी आणि कसून मेहनत करणारा म्हणून ओळखत होते. या वर्षी त्याने जेव्हा



सरावाला सुरुवात केली तेव्हा एका अडथळ्यापासून दुसऱ्या अडथळ्यापर्यंत जायला त्याला ६ ढेंगा टाकाव्या लागायच्या. परंतु प्रत्यक्ष स्पर्धेत उतरेपर्यंत त्याने इतका झटून सराव केला की त्याच्या ढेंगांतील अंतर सहा इंचाने वाढले. त्यामुळे तो सुरुवातीपासूनचे ६ अडथळे केवळ ३० ढेंगांत पार करू लागला.

तर लागोपाठच्या दोन अडथळ्यांतील अंतर काय ?



१७. पार्टीला जमलेली मुले

शेठ दानमल हलवाईचा पुखराज हा मुलगा दहावीची परीक्षा पहिल्या वर्गात उत्तीर्ण झाला याचा शेठजींना कोण आनंद झाला! गेल्या दहा पिढ्यांत शेठजींच्या घराण्यात कुणीही कोणतीही परीक्षा पहिल्या वर्गात



उत्तीर्ण झाला नव्हता. पहिल्या वर्गात उत्तीर्ण होणारा घराण्यातील हा पहिलाच मुलगा असल्याने शेठजींनी पुखराजच्या शाळेतील दहावीच्या सर्व मुलांना पार्टी द्यायचे ठरवले.

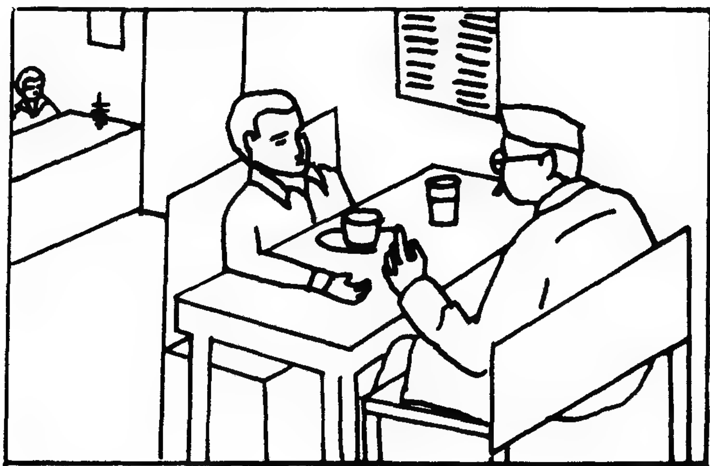
एका सुशोभित मंडपात ही पार्टी आयोजित करण्यात आली होती. खुर्च्या-टेबले मांडलेली होती. प्रत्येक दोन मुलांसाठी एका बशीत केशरी पाकातील जिलेब्या ठेवण्यात आल्या होत्या तर प्रत्येक तीन मुलांसाठी दुसऱ्या बशीत गरमागरम भावनगरी गाठ्या ठेवण्यात आल्या होत्या आणि प्रत्येक चार मुलांसाठी तिसऱ्या बशीत तिखट झणझणीत शेव ठेवण्यात

आली होती. पार्टीत अशा प्रकारे एकूण ७८ बशांचा वापर करावा लागला. तर पार्टीला किती मुले जमली होती ?



१८. देळ्यातील वयोवृद्ध वाघ

नोकरीनिमित्त मी देळे या गावी राहायला गेलो होतो खरा, पण मला तिथली काहीच माहिती नव्हती. एके दिवशी एका चहाच्या दुकानात चहा प्यायला बसलो असता समोर एक गृहस्थ चहा प्यायला येऊन बसले. नवीन ओळख करून घेण्याच्या हेतूने नमस्कार करीत मी त्यांना म्हटले, 'आपण या गावचे सगळ्यात वृद्ध गृहस्थ दिसता!'



मंदस्मित करीत आणि उलट नमस्कार करीत ते म्हणाले, 'मी वृद्ध आहे हे खरं. पण मी श्री. वाघांइतका वृद्ध नाही. श्री. वाघांना वगळून तुम्ही त्यांच्या सौभाग्यवतींच्या आणि त्यांच्या बछड्यांच्या वयांची बेरीज केली

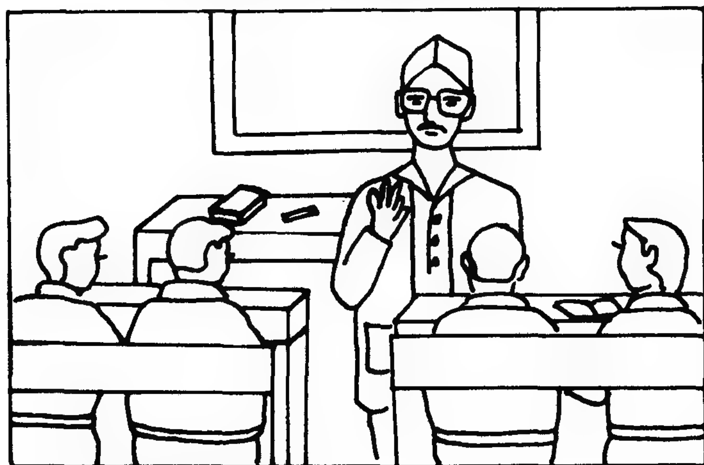
की तुम्हाला श्री. वाघांचं नेमकं वय मिळालं समजा! दुसरं वैशिष्ट्य म्हणजे वाघांच्या पत्नीच्या आणि त्यांच्या मुलांच्या वयांचा गुणाकार केला की गुणाकाराच्या उत्तरात एक हा एकमेव अंक पुन्हा पुन्हा येतो. श्री. वाघांची पत्नी आणि मुलं मिळून जी संख्या मिळते नेमका तितक्या वेळा १ हा अंक गुणाकाराच्या उत्तरात येतो. प्रत्येक वाघाचे वय शंभराहून कमी आणि वेगवेगळे असून ते विषमही आहे. याला अपवाद श्री. वाघांचे वय. तेही शंभराहून कमी असले तरी सम आहे. आणि हे तुम्हाला ठाऊकही असेल!'

मी म्हणालो, 'अहो, कसं ठाऊक असणार? मी या गावी प्रथमच येत आहे. मला इथं येऊन अद्याप आठवडाही लोटला नाही. पण आता तुम्ही हे सारे सांगत आहात तेव्हा त्या माहितीच्या आधारे मला वाघ कुटुंबातील प्रत्येकाचे वय जाणून घेतले पाहिजे.'

तर या माहितीच्या आधारे श्री. वाघांचे, सौ. वाघांचे आणि त्यांच्या बछड्यांचे वय मी कसे शोधून काढावे?

❉ ✱ ❉

१९. असे अंक शोधून काढणार?



चौधरी गुरुजी मुलांना म्हणाले, 'मुलांनो, १९ बेरीज असलेले असे तीन अंक शोधून काढायचे आहेत की ज्यांचा गुणाकार १४४ होतो आणि ज्यातील प्रत्येक अंकाच्या वर्गाची बेरीज केली असता १४९ मिळतात.' मग तुम्ही त्या कामाला लागता का ?



२०. बबलूच्या आईचे वय

बबलू १३ वर्षांचा असताना त्याच्या आईचे वय ४० वर्षांचे होते; तर किती वर्षांपूर्वी त्याच्या आईचे वय त्याच्या वयाच्या चौपट होते ?





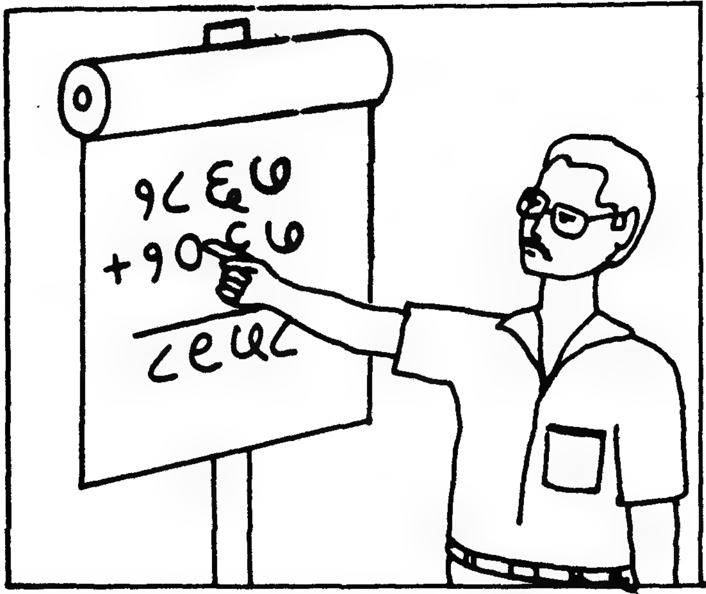
तास लागला. मिरवणुकीच्या अग्रस्थानी झेंडा घेऊन जाणारा पहिलाच मनुष्य मला ओलांडून जात असताना दुसरा एक गणवेषधारी माणूस मिरवणुकीच्या मागच्या टोकाला जायला निघाला. मिरवणुकीच्या मागच्या टोकाला पोहोचताच तो लागलीच पुन्हा मिरवणुकीच्या दिशेला वळला आणि तिच्या पुढल्या टोकाला येऊ लागला. विशेष म्हणजे मिरवणुकीच्या मागच्या टोकाला जाताना आणि तेथून परतताना त्याच्या चालण्याचा वेग सारखाच होता. परतीच्या वेळी तो माझ्यापर्यंत जेव्हा पोहोचला तेव्हा निम्मी मिरवणूक मला ओलांडून पुढे गेली होती. तर त्या गणवेषधारी माणसाचा चालण्याचा वेग काय होता ?



२३. किती सोपी बेरीज !

```
  १८६७
+ १०६७
  ----
  ८९५८
```

सोबत दिलेले गणित फळ्यावर मांडून झाल्यावर चौधरी गुरुजी मुलांना म्हणाले, 'मुलांनो, हे गणित म्हणजे एक अगदी सोपी बेरीज आहे, पण दुर्दैवाने या गणितातील एकूण एक अंक चुकीचे असल्याने बेरीजही चुकीची झाली आहे. मात्र गंमत अशी की या गणितातील एक चुकीचा अंक दुसऱ्या एका बिनचूक अंकासाठी आला आहे आणि गणितात जिथे जिथे तो आला आहे तिथे तिथे तो एकाच व त्याच बिनचूक अंकासाठी आला आहे. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर एका बिनचूक अंकासाठी एक चुकीचा अंक, दुसऱ्या बिनचूक अंकासाठी दुसरा चुकीचा अंक याप्रमाणे वेगवेगळ्या बिनचूक अंकांसाठी वेगवेगळे चुकीचे अंक आले आहेत. पण कोणत्याही एका बिनचूक अंकासाठी जसे दोन चुकीचे अंक आलेले नाहीत, तसेच



एकाच चुकीच्या अंकाने दोन वेगवेगळ्या बिनचूक अंकांचे प्रतिनिधित्व केलेले नाही. तेव्हा चुकीच्या अंकांच्या जागी बिनचूक अंक लिहून ही बेरीज बिनचूक करा बरं!'



२४. गवताच्या गठ्ठ्यांचे वजन

लक्ष्मीचंद शेठजी गवताचे मोठे व्यापारी होते. एकदा एका गिऱ्हाइकाला गवताचे पाच गठ्ठे द्यायचे होते, तेव्हा शेठजींनी कुंडलिक नावाच्या गड्याला गोदामातून पाच गठ्ठे काढून प्रत्येक गठ्ठ्याचे व्यवस्थित वजन करून तयार

ठेवायला सांगितले. पण कुंडलिकाला शेठजींचे म्हणणे नीट कळले नाही आणि प्रत्येक गठ्ठ्याचे स्वतंत्रपणे वजन करण्याऐवजी त्याने दोन-दोन गठ्ठ्यांचे एकत्र वजन केले. सुदैव इतकेच की पाच गठ्ठ्यांतील दोन-दोन गठ्ठे जितक्या प्रकारे एकत्र करता येतात तितक्या प्रकारे एकत्र करून त्याने सर्व



प्रकारे गठ्ठ्यांचे जोडीने वजन केले होते आणि लक्ष्मीचंद शेठजींना तशी चिठ्ठीही पाठविली होती. त्यात जोडी-जोडीने एकत्र केलेल्या गठ्ठ्यांचे वजन पुढीलप्रमाणे दिले होते – ११०, ११२, ११३, ११४, ११५, ११६, ११७, ११८, १२० आणि १२१ कि. ग्रॅ.

यावरून लक्ष्मीचंद शेठजींना प्रत्येक गठ्ठ्याचे वजन किती होते हे माहीत झाले. काही वाचकांना वाटेल की या जोडीचे वजन इतके, या दुसऱ्या जोडीचे वजन इतके असे कोणत्या जोडीचे वजन किती हे सांगितल्यासच आम्ही प्रत्येक गठ्ठ्याचे वजन सांगू शकू. पण लक्ष्मीचंद शेठजींना मात्र

त्याची काही आवश्य..ता भासली नाही. तर लक्ष्मीचंद शेठजींनी प्रत्येक गठ्ठ्याचे वजन कसे माहीत करून घेतले असेल?

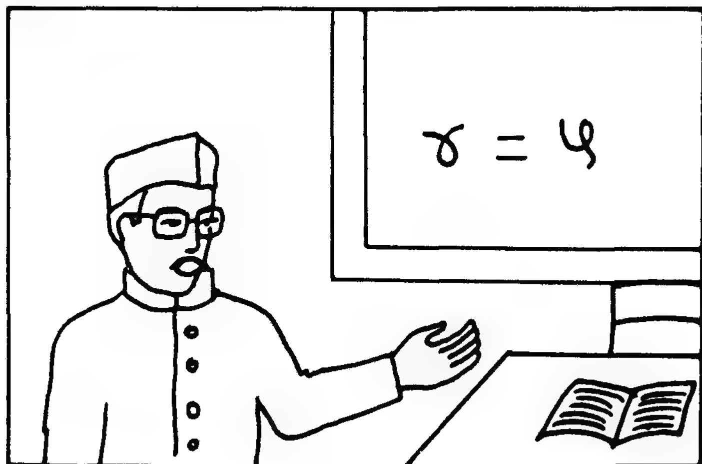


२५. समीकरण सोडवताना कुठे चूक झाली?

''अ'ची किंमत 'ब' आणि 'क'च्या बेरजेइतकी असल्यास बीजगणितात आपण ती अशी लिहू शकतो.' असे म्हणत चौधरी गुरुजींनी फळ्यावर पुढीलप्रमाणे समीकरण मांडले.

अ = ब + क

नंतर त्यांनी दोन्ही बाजूंना ५ ने गुणले आणि ५अ = ५ब + ५क असे समीकरण मांडले.



नंतर तेच समीकरण ब + क = अ असे लिहून दोन्ही बाजूंना ४ ने गुणले आणि

४ ब + ४ क = ४ अ असे समीकरण मिळविले. शेवटी दोन्ही समीकरणांची बेरीज केली असता त्यांना

५ अ + ४ ब + ४ क = ५ ब + ५ क + ४ अ असे नवे समीकरण मिळाले.

त्यातून ९ अ वजा केले असता

४ ब + ४ क – ४ अ = ५ ब + ५ क – ५ अ किंवा

४ (ब + क – अ) = ५ (ब + क – अ) असे समीकरण मिळाले.

पुढे दोन्ही बाजूंना (ब + क – अ) ने भागले असता ४ = ५ मिळाले.

तेव्हा चपापल्याचा आविर्भाव करीत गुरुजी म्हणाले, 'मुलांनो, हे समीकरण सोडवताना माझं कुठंतरी काहीतरी चुकलं आहे. पण कुठं ते मला कळत नाही, 'तेव्हा माझी चूक जरा शोधून काढाल का?'

(मुलांची कसोटी घेण्यासाठी चौधरी गुरुजींनी खरं तर ही चूक जाणूनबुजून केली आहे हे सूज्ञांना सांगणे न लगे!)



२६. अजब योगायोग

केवळ एका दिवसाच्या वास्तव्यासाठी जेव्हा बाबा नारायणस्वामींनी पंचपोरे दांपत्याच्या घराला भेट दिली तेव्हा बाबांवर अपरंपार श्रद्धा असलेल्या त्या दांपत्याला कोण आनंद झाला! बाबांचा आशीर्वाद घेण्यासाठी लगेच त्यांनी आपल्या छोट्या लताला बाबांच्या चरणांवर ठेवले आणि लहानग्या दत्ताला बाबांना साष्टांग नमस्कार घालायला सांगितले. नंतर ते दांपत्य बाबांना म्हणाले, 'बाबा, या आमच्या दत्ताचे वय लताच्या दुप्पट आहे.' इतक्यात ललिताही तिथे आली. ती बाबांना वाकून नमस्कार करीत असतानाच तिची आई बाबांना म्हणाली, 'बरं का बाबा, हिच्या वयात लताचं वय मिळवलं की ते दत्ताच्या वयाच्या दुप्पट होतं.' तोच धापा

टाकत अवधूत तेथे येऊन पोहोचला. तो बाबांचा आशीर्वाद घेत असताना कुणीतरी कुजबुजले की त्या दोन मुलांच्या वयाची बेरीज त्या दोन मुलींच्या वयाच्या बेरजेच्या दुप्पट होते. हे सारे ऐकून जमलेल्या मंडळींना उद्देशून बाबा म्हणाले, 'देवाचे वरदान लाभलेल्या घरात असे अजब योगायोग अगदी सहज घडून येत असतात.' तोच वसुधा तेथे येऊन टपकली, 'बाबा,



नमस्कार करते हं मी!' असे म्हणत तिने बाबांच्या पायांवर आपले डोके ठेवले आणि नंतर उभी राहत ती म्हणाली, 'बाबा, आज माझा २१ वा वाढदिवस आहे आणि अशा दिवशी तुमच्या पदस्पर्शाचा योग यावा हे मी माझं भाग्य समजते.' यावर योगायोगाचा आणखी एक धक्का देत श्री. पंचपोरे म्हणाले, 'माझ्या तिन्ही मुलींच्या वयाची बेरीज माझ्या दोन्ही मुलांच्या वयाच्या बेरजेच्या दुप्पट आहे.'

यावरून श्री. व सौ. पंचपोरेंच्या प्रत्येक मुलीचे आणि प्रत्येक मुलाचे वय तुम्ही सांगू शकाल का?



२७. विचित्र गणित

```
र क्ष अ म य
      × ४
-----------
य म अ क्ष र
```

चौधरी गुरुजींनी वरील विचित्र गणित फळ्यावर मांडले व ते मुलांना म्हणाले, 'र, क्ष, अ, म, य हे प्रत्येक अक्षर म्हणजे एकेक अंक आहे. जर र = २ असेल तर इतर अक्षरांबद्दल अंक लिहून तुम्ही हे गणित बरोबर सोडवाल का?'



२८. अनेक अंक अदृश्य झालेला भागाकार

```
– – ) – – – – ७ ( २ – –
        – –
      -------
        ४ – –
        – – –
      ---------
            – –
            – –
      ---------
            ० ०
```

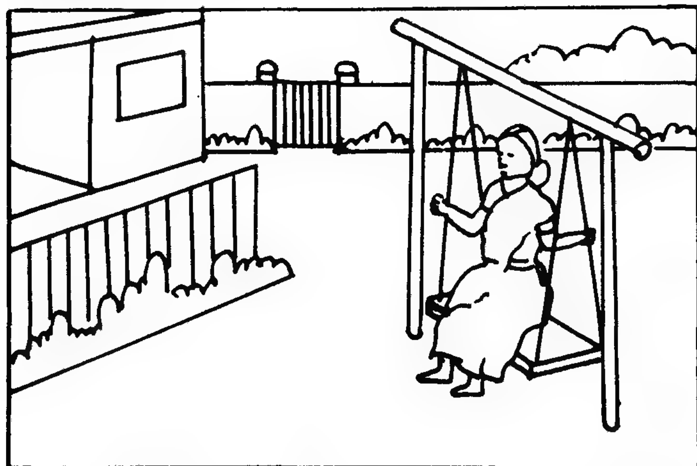
वरील गणित फळ्यावर लिहून झाल्यावर नेहमीप्रमाणे चौधरी गुरुजी वर्गाकडे तोंड करून म्हणाले, 'मुलांनो, या गणितातील अनेक अंक अदृश्य झालेले तुम्ही पाहताच, तेव्हा त्या अंकांना दृश्य स्वरूप देऊन ते गणित पूर्ण करा पाहू!'

मग हे कसे करायचे?



२९. विधवेच्या वाट्याची रक्कम

१९५७ पूर्वी आपल्या भारतात दशमान पद्धतीची नाणी व्यवहारात नव्हती. त्यावेळी १६ आण्यांचा १ रुपया, ४ पैशांचा किंवा १२ पयांचा १ आणा आणि ३ पयांचा १ पैसा होत असे. अशा जमान्यात जेव्हा शेठ पुरनमलांचा मृत्यू झाला तेव्हा त्यांच्या घरच्या तिजोरीत रोख

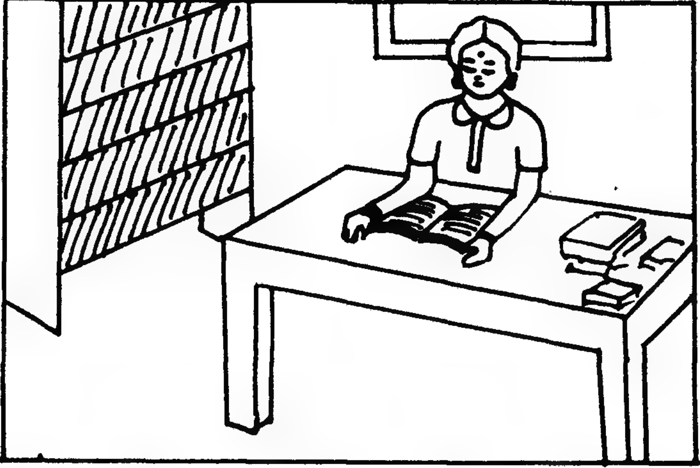


१,९५,४४२ रुपये ९ आणे ९ पै इतकी रक्कम मिळाली. ही रक्कम आपली पत्नी, ५ मुलगे आणि ४ मुली यांना वाटून द्यावी असे शेठजींनी आपल्या मृत्युपत्रात म्हटले होते. त्या मृत्युपत्रात पुढे असेही म्हटले होते की प्रत्येक मुलाला, मुलीला मिळणाऱ्या रकमेच्या तिप्पट रक्कम देण्यात यावी आणि प्रत्येक मुलीला त्यांच्या पत्नीला मिळणाऱ्या रकमेच्या दुप्पट रक्कम मिळावी. तर शेठजींच्या विधवेच्या वाट्याला किती रक्कम यावी ?



३०. विश्वकोशाचे खंड

मागच्या वाढदिवसाला पिरोजला तिच्या काकांनी सचित्र विश्वकोशाचा एक छानसा संच भेट म्हणून दिला. गंमत म्हणजे पहिल्या खंडाची पृष्ठसंख्या त्या संचातील खंडसंख्येच्या वर्गाहून एकाने जास्त होती. दुसऱ्या खंडाची



पृष्ठसंख्या पहिल्या खंडाच्या पृष्ठसंख्येहून दोनाने जास्त होती. तिसऱ्या खंडाची पृष्ठसंख्या दुसऱ्या खंडाच्या पृष्ठसंख्येहून तिनाने जास्त होती आणि याचप्रमाणे पुढील खंडांची पृष्ठसंख्या वाढत्या प्रमाणात होती. शेवटच्या खंडाची पृष्ठसंख्या ३४५ होती.

तर त्या संचात एकूण किती खंड होते?



३१. चमत्कारिक संख्या

'आज नावरबाई न आल्यामुळे गणिताचा तास होणार नाही, तेव्हा तुम्ही वर्गात गोंगाट न करता काही वाचत तरी बसा किंवा गणितावर आधारलेली कोडी तरी सोडवीत बसा.' असा मुख्याध्यापिकाबाईंचा निरोप शिपायाने दिल्यावर मॉनिटरच्या परवानगीने सुभाषिणी वर्गातील मुलींपुढे कोडे घालायला उभी राहिली.



प्रथम तिने फळ्यावर एक आयताकृती चौकट काढली आणि तीत ९८०१ ही संख्या लिहिली. नंतर ती मुलींना उद्देशून म्हणाली, 'समजा,

फळ्यावर दाखविल्याप्रमाणे एका आयताकृती कागदावर ९८०१ ही संख्या लिहिलेली आहे. नंतर तो कागद अशा रीतीने फाटला की कागदाच्या एका भागावर ९८ ही संख्या व दुसऱ्या भागावर ०१ ही संख्या आली.' ही गोष्ट वर्गातील मुलींना नीट समजावी म्हणून तिने फळ्यावर पुढीलप्रमाणे आणखी एक आकृती काढली.

९८/०१

पुढे ती म्हणाली, 'कागद फाटल्याने ९८ आणि ०१ या ज्या दोन संख्या मिळतात त्यांची बेरीज ९८ अधिक ०१ याप्रमाणे ९९ होते हे मी नव्याने सांगायला नको. पण काय चमत्कार पाहा; ९९ चा वर्ग केल्यास आपणास मूळची ९८०१ हीच संख्या मिळते.'

'अगदी बरोबर.' वर्गातील मुलींनी माना डोलावत म्हटले.

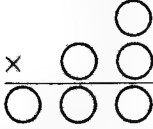
त्यावर सुभाषिणी म्हणाली, 'मैत्रिणींनो, असा चमत्कार दाखवणारी ९८०१ ही केवळ एकच एक संख्या नाही. अजूनही अशा काही चार अंकी संख्या आहेत की ज्यांच्यातील पहिल्या आणि शेवटल्या दोन अंकी दोन संख्यांची बेरीज केली आणि त्या बेरजेचा वर्ग केला तर पुन्हा मूळचीच संख्या मिळण्याचा चमत्कार घडतो. तर त्या चमत्कारिक संख्या कोणत्या हे तुम्ही शोधून काढाल का ?'

आणि काय गंमत ! सारा वर्ग हे कोडे शांतपणे सोडवू लागला. गणिताचा तास संपायला आला तेव्हा कुठे आनंदाने टाळ्या पिटत प्रज्ञा म्हणाली, 'मला कोडं सुटलं ! सुटलं !'

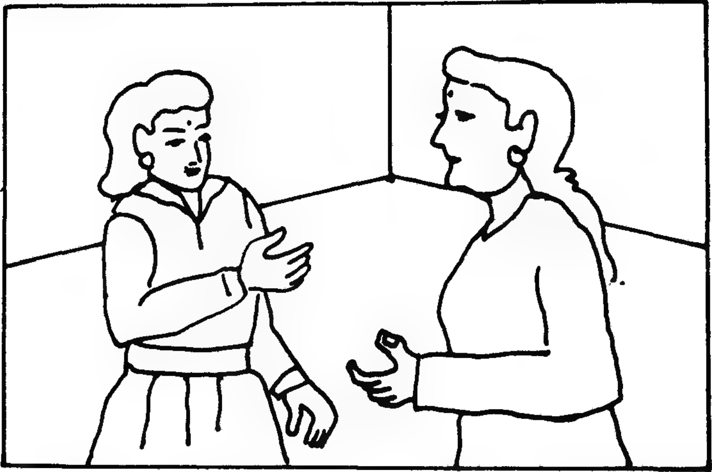
तर या चमत्कारिक चार अंकी संख्या कोणत्या ? (अशा आणखी चमत्कारिक संख्या केवळ दोन आहेत.)



३२. कसले हे गणित ?



सोबतच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे सिम्मीने गुणाकार लिहावा त्या पद्धतीने सहा गोल टिकल्या मांडल्या व ती निम्मीला म्हणाली, 'निम्मी, या गोल टिकल्यांत १ ते ६ अंक एकेकदाच वापरून तू हे गुणाकाराचं गणित बरोबर लिहिशील का ?'



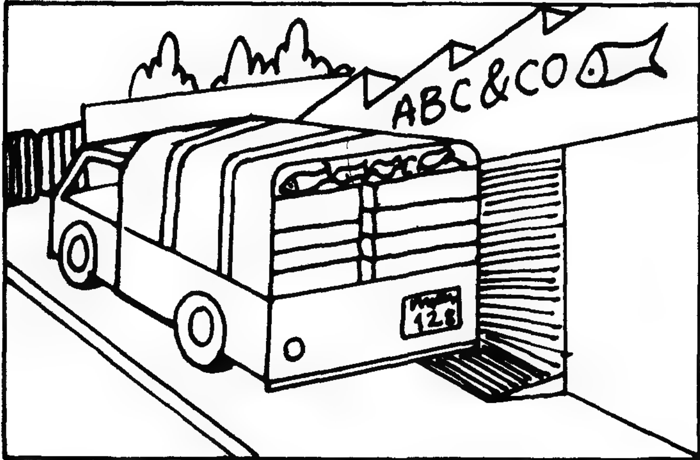
'त्यात काय ?' असे म्हणत निम्मीने त्या टिकल्यांत भराभर अंक मांडले व गणित अर्थपूर्ण केले.

ते गणित कसे असेल ?



३३. असवली बंदर ते बलनपूर कारखाना

मासेमारीसाठी मोठा किनारा लाभलेल्या आणि आंतर्राष्ट्रीय विमानतळ असलेल्या बल्नपूर शहरात चाटा कंपनीचा माशांवर योग्य ती प्रक्रिया करून ते मोहरबंद डब्यातून परदेशी पाठविण्याचा 'बल्नपूर सी-फूड प्रॉडक्टस्' नावाचा एक मोठा कारखाना आहे. स्थानिक लोक त्याला 'बल्नपूर कारखाना' म्हणूनच ओळखतात. माशांचा व्यवस्थित पुरवठा व्हावा म्हणून कंपनीने अनेक कंत्राटदार नेमलेले आहेत. साहजिकच दूरवरच्या छोट्या-मोठ्या किनाऱ्यावरील मासेही येथे आणले जातात. अशाच कंत्राटदारांपैकी भागडू पाईक हा एक कंत्राटदार आहे. तो असवली बंदरावरील कोळ्यांकडून मोठमोठी ताजी पापलेटं, ताज्या सुरमई, ताजी टायगर कोलंबी खरेदी करतो आणि त्याच्या वातानुकूलित टेम्पोतून कारखान्यात पाठवतो.



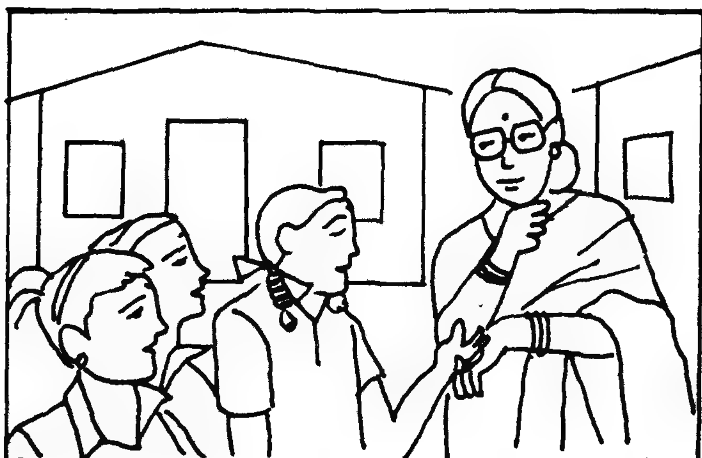
एके दिवशी ड्रायव्हर न आल्याने भागडूलाच टेम्पो घेऊन कारखान्यात जावे लागले. तो कारखान्यात जेव्हा पोहोचला तेव्हा त्याच्या असे लक्षात

आले की, असवली बंदर ते बल्लनपूर कारखाना हे अंतर जर त्याने सरासरी ताशी ३२ कि. मी. वेगाने तोडले असते तर तो कारखान्यात १ तास अगोदर पोहोचला असता. याउलट त्याने हे अंतर जर सरासरी ताशी २४ कि. मी. वेगाने तोडले असते तर तो कारखान्यात १ तास उशिरा पोहोचला असता. तर असवली बंदर ते बल्लनपूर कारखाना हे अंतर किती ?



३४. तिघींचे वय

यशोदाकाकू घरी आल्या तेव्हा अनी, बनी आणि जनी या तिन्ही बहिणी अंगणात खेळत होत्या.



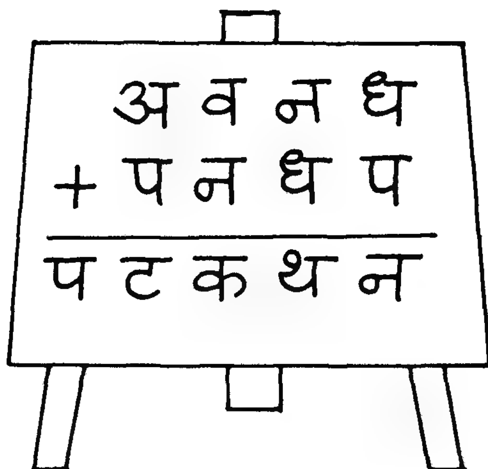
तशा थोरल्या अनीकडे पाहत काकू म्हणाल्या, 'अग, तुम्हा तिघी बहिणींचं वय काय ?'

पण अनी कसली खट्याळ! ती काकूंना कोड्यात टाकण्यासाठी म्हणाली, 'हे बघा काकू, माझं वय जनीच्या तिप्पट आहे आणि आणखी दोन वर्षांनी माझं वय बनीच्या तेव्हाच्या वयाच्या दुप्पट होईल. आणि बरं का काकू! बनी जनीहून एका वर्षानं मोठी आहे!'

काकूंच्या आणि अनीच्या या संभाषणावरून त्या तीन बहिणींचे वय काय असेल हे तुम्ही सांगू शकाल? ❈ ✱ ❈

३५. प ट क थ न

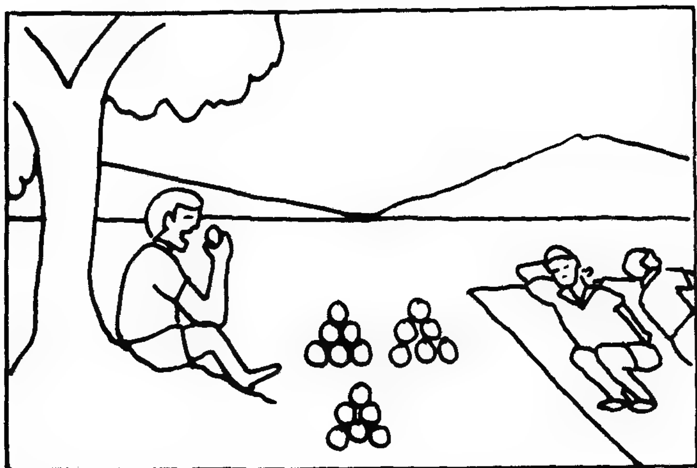
```
  अ व न ध
+ प न ध प
---------
प ट क थ न
```



सोबतच्या चित्रात दिलेले 'अक्षरगणित' फळ्यावर लिहून झाल्यावर चौधरी गुरुजी मुलांना म्हणाले, 'मुलांनो, नित्यासारखंच हे एक अक्षरगणित आहे. यातील प्रत्येक अक्षर एक ठराविक अंक दर्शविते. किंबहुना असं म्हणू या की ठराविक अंकासाठी एक ठराविक अक्षर आलेलं आहे. यापैकी 'अ' हे अक्षर ९ या अंकासाठी आणि 'थ' हे अक्षर ५ या अंकासाठी आलं आहे. एवढ्या माहितीच्या आधारे या अक्षरगणिताचे रूपांतर तुम्ही अंकगणितात कराल का ?'

❇ ✱ ❇

३६. चिकूंची चमत्कारिक वाटणी



येस्या, धन्या आणि तान्या या तीन पोरांनी एका रात्री एका बागेतून पिकलेले चिकू चोरून आणले आणि दुसऱ्या दिवशी ते सारखे वाटून घ्यायचे ठरवून त्यांनी ते त्यांच्या घराजवळ एका ठिकाणी लपवून ठेवले. नंतर ते घरी झोपायला गेले.

परंतु चिकूच्या लोभाने येश्याला झोप लागेना. तो हळूच उठला आणि चिकू लपवून ठेवल्याजागी गुपचूप गेला. हिशेब किंवा गणित येत नसल्याने स्वतःला एक, धन्याला एक, तान्याला एक; पुन्हा स्वतःला एक, धन्याला एक, तान्याला एक असे करत त्याने चिकूंची तिघांसाठी सारखी वाटणी केली. तेव्हा एक चिकू उरला. तो त्याने खाऊन टाकला. नंतर दोन वाटण्या एकत्र करून त्या पूर्वीच्याच जागी ठेवून दिल्या आणि स्वतःची वाटणी घेऊन तो घरी गेला.

काही वेळाने धन्या उठला. तोही चिकू लपवून ठेवल्याजागी आला. येश्याप्रमाणे धन्यानेही चिकूंची एक-एक करत तीन भागांत समान वाटणी केली. तेव्हाही एक चिकू उरला. तो त्याने खाऊन टाकला. नंतर दोन वाटण्या एकत्र करून पूर्वस्थानी लपवून ठेवल्या आणि स्वतःची वाटणी घेऊन तो त्याच्या घरी गेला.

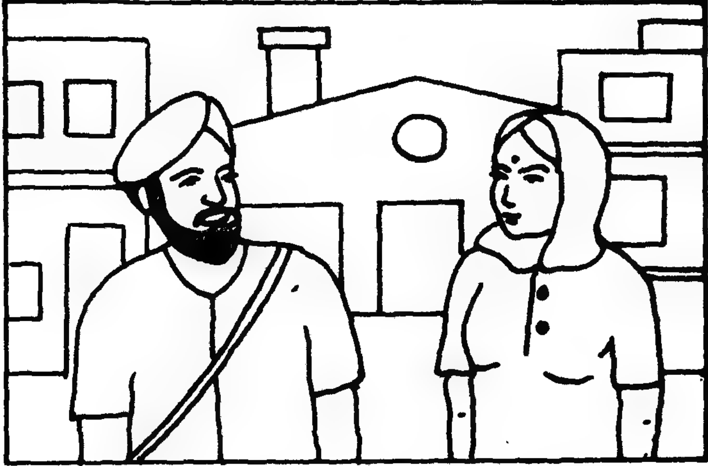
शेवटी तान्या उठला. तोही चिकू लपवून ठेवल्याजागी आला. त्यानेही चिकूंच्या तीन सारख्या वाटण्या केल्या. त्याहीवेळी एक चिकू उरला. त्याने तो खाल्ला. नंतर दोन वाटण्या एकत्र केल्या आणि पुन्हा त्या होत्या त्या ठिकाणी लपवून ठेवल्या. मग त्याने स्वतःची वाटणी घेतली आणि घरचा रस्ता धरला.

दुसरे दिवशी सकाळी ते तिघे एकत्र येऊन जेव्हा चिकूंची वाटणी करायला बसले तेव्हा त्यांच्यापैकी प्रत्येकाच्या वाटणीला सात चिकू आले आणि एक चिकू उरला. तो त्यांनी एका वाटसरूला देऊन टाकला आणि ते आपापली वाटणी घेऊन घरी परतले. तर त्या तिघांनी बागेतून किती चिकू चोरून आणले होते?



३७. अमृताकौरचे वय

चौपन्न वर्षांचा जसवंतसिंग अमृताकौर या आपल्या चुलतबहिणीला म्हणाला, 'तू जेव्हा माझ्या आजच्या वयाच्या एक तृतीयांश वर्षांची होतीस तेव्हा मी तुझ्या आजच्या वयाहून चार वर्षांनी मोठा होतो, हे तुला आठवतं का ग ?'



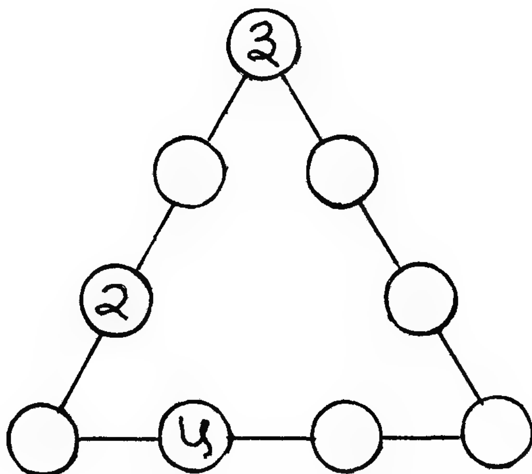
'न आठवायला काय झालं भय्या ?' अमृताकौर हसत हसत म्हणाली.

तर अमृताकौरचे आजचे वय काय ?



३८. गोळ्यांत अंक भरायचे

'अवी, काय चाललंय ? कसली त्रिकोणाकृती आहे रे ती ?' अविराजला त्याच्या काकांनी विचारले तशी तो म्हणाला, 'काका, मी किनई एक कोडं



सोडवत आहे.' नंतर सोबत दिलेली आकृती काकांना दाखवत तो म्हणाला, 'काका, या त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूवरील ४ गोळ्यांत १ ते ९ अंक अशा पद्धतीनं लिहायचे आहेत की प्रत्येक बाजूवरील गोळ्यांतील अंकांची बेरीज नेमकी २१ येईल. कोणताही अंक गाळायचा नाही की कोणत्याही अंकाची पुनरावृत्ती करायची नाही. गंमत म्हणजे या कोड्यातील तीन गोळ्यांत अगोदरच अंक लिहिलेले आहेत आणि रिकाम्या गोळ्यांत उरलेले अंक भरावयाचे आहेत.'

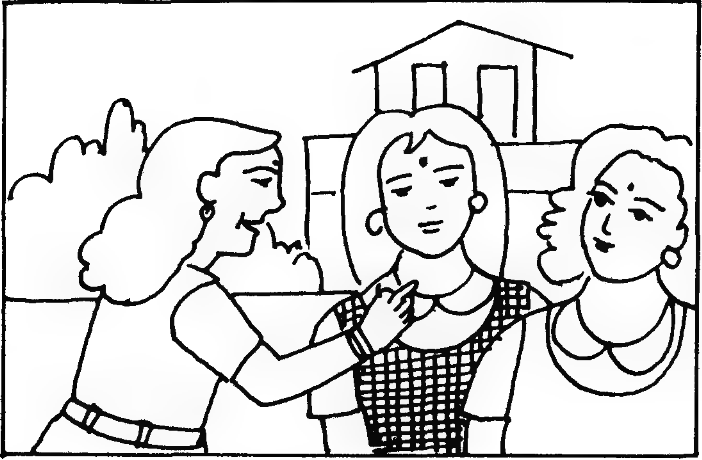
'अस्सं होय!' म्हणत अवीचे काका त्याला मदत करायला बसले.

तर दोघांनी ते कोडं कसं सोडवलं असेल?



३९. खोल्यांचे क्रमांक

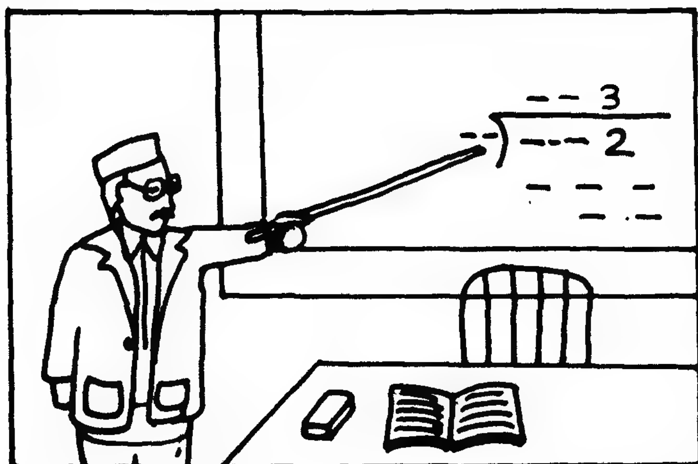
बऱ्याच महिन्यांनी माणिकची राधा आणि सुधा या मैत्रिणींशी गाठ पडली. बोलण्याच्या ओघात माणिक म्हणाली, 'तुम्ही दोघी आता शाळेच्या वसतिगृहात राहता ना? तर मग तुम्ही तुमच्या खोल्यांचे क्रमांक सांगून टाका, म्हणजे सवड मिळाली की मी येत जाईन तुम्हाला भेटायला.' परंतु राधा आणि सुधा दोघीही खट्याळ होत्या. त्या म्हणाल्या, 'स्कॉलर, आम्हा दोघींच्या खोल्यांचे क्रमांक दोन अंकी असून दोघींच्या क्रमांकांत तेच अंक आहेत; फक्त त्यांचे स्थान बदलले आहे.'



त्यावर अधिक स्पष्टीकरण देण्याच्या थाटात राधा म्हणाली, 'माझ्या खोलीच्या क्रमांकातील एकम्स्थानचा अंक सुधाच्या खोलीच्या क्रमांकाच्या दहम्स्थानी आला आहे आणि तिच्या क्रमांकातील एकम्स्थानचा अंक माझ्या क्रमांकाच्या दहम्स्थानी आला आहे.'

२१. बरेचसे अंक गायब झालेला भागाकार

चौधरी गुरुजींनी बरेचसे अंक गायब झालेल्या भागाकाराचे पुढील गणित फळ्यावर लिहिले.




```
           – – ३
      ___________
– – ) – – – २
      – ४
      _____
      – – –
      – ५ –
      ________
        – – –
          – –
        ______
            –
```

नंतर मुलांकडे वळून ते म्हणाले, 'या गणितातील गायब झालेल्या अंकांच्या जागी योग्य ते अंक लिहून हे गणित तुम्ही अर्थपूर्ण कराल का?'



२२. गणवेषधारी माणसाचा वेग

मी रस्त्याच्या कडेला उभा राहून मिरवणूक पाहत होतो. ती मिरवणूक चांगली दीड मैल लांब होती. मला ओलांडून जायला तिला तब्बल पाऊण

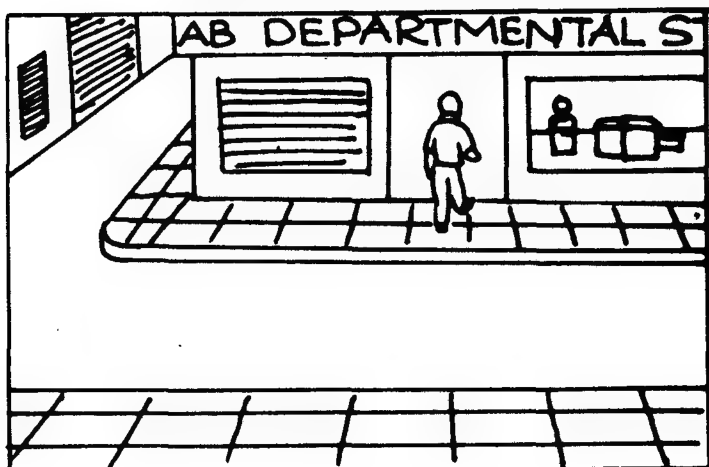
नंतर सुधा म्हणाली, 'माणिक, माझ्या खोलीचा क्रमांक माझ्या देहाप्रमाणेच राधेच्या खोलीच्या क्रमांकापेक्षा मोठा आहे आणि आम्हा दोघींच्या क्रमांकांतील अंतर केवळ ५४ आहे. यावरून स्कॉलर, तुला आम्हा दोघींच्या खोलीचा क्रमांक माहीत झाला असावा.'

माणिकने सुधाला हातानेच थांबायला सांगितले आणि कागद-पेन्सिल घेऊन तिने काही आकडेमोड केली. नंतर कागदावरील नजर न काढताच माणिक दोघा मैत्रिणींना म्हणाली, 'अग, तुमच्या खोल्यांचे क्रमांक सम आहेत की विषम?' त्यावर दोघींनी एकसुरात 'सम' असे उत्तर देताच माणिकने त्या दोघा मैत्रिणींना त्यांच्या खोल्यांचे क्रमांक तडकाफडकी सांगून टाकले... तर तिला हे क्रमांक कसे माहीत झाले?

❀ ❀ ❀

४०. सुक्यामेव्याची खरेदी

डिपार्टमेंटल स्टोअर, सुपरमार्केट वगैरेंच्या निर्मितीमुळे एकाच छपराखाली अगदी भिन्न भिन्न प्रकारच्या वस्तूंची खरेदी करणे अगदी सोपे झाले आहे



नाही? त्यात सेलोफेनसारख्या पारदर्शक, वजनास अगदी हलक्या आणि नेण्यास सुलभ अशा पिशव्यांची भर पडल्याने खरेदी ही खऱ्या अर्थाने आनंददायी बाब झाली आहे.

आता हेच पाहा ना! सिंगापूरच्या सरंगून रस्त्यावरील 'महम्मद मुस्ताफा ॲण्ड शमसुद्दीन कंपनी प्रायव्हेट लिमिटेड' या डिपार्टमेंटल स्टोअरमध्ये कपिल जेव्हा शिरला तेव्हा एक सुंदर घड्याळ, एक भारीतले पेन आणि कॉर्डलेस टेलिफोन एवढ्याच वस्तूंची खरेदी करायची असा त्याचा मानस होता.

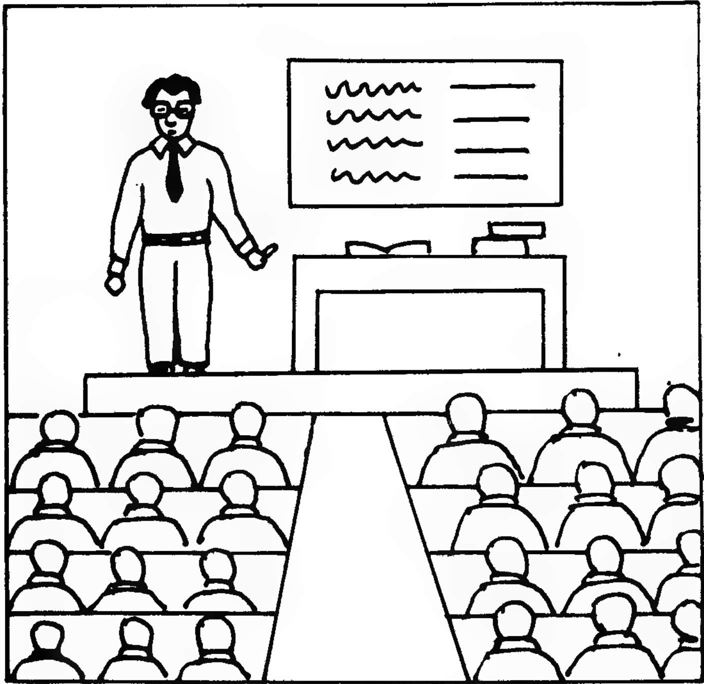
परंतु घड्याळाची खरेदी केल्यावर त्याची नजर ड्रायफ्रूट विभागावर पडली. तेथील सेलोफेनच्या पिशव्यांत कलात्मकरीत्या भरून ठेवलेल्या सुक्यामेव्यामुळे त्याची पावले आपोआप त्या दिशेस खेचली गेली आणि तो त्या विभागात कधी जाऊन पोहोचला हे त्याचे त्यालाच कळले नाही. ५०० ग्रॅम अक्रोड आणि १ किलो बदाम असलेली पिशवी त्याने ८ सिंगापुरी डॉलरना खरेदी केली. २ किलो पिस्ते आणि ५०० ग्रॅम अक्रोड असलेली पिशवी त्याने १२ सिंगापुरी डॉलरना खरेदी केली तर १५०० ग्रॅम काजू, ५०० ग्रॅम अक्रोड आणि ५०० ग्रॅम पिस्ते असलेली पिशवी त्याने ६ सिंगापुरी डॉलरना खरेदी केली.

त्याला जर प्रत्येकी ५०० ग्रॅम काजू, पिस्ते, बदाम आणि अक्रोड असलेली पिशवी खरेदी करायची असती तर त्याला किती सिंगापुरी डॉलर मोजावे लागले असते?



४१. सरस अक्षरगणित

'अक्षरगणितात आणि बीजगणितात एक अक्षर एका ठराविक अंकासाठी येते किंवा एक अंक एका ठराविक अक्षराने दाखविला जातो हे तुम्हाला



ठाऊक असेलच परंतु अक्षरगणितातील आणि बीजगणितातील महत्त्वाचा फरक म्हणजे अक्षरगणित हे सांकेतिक गणित असते आणि त्याला अंकगणिताचे सारे नियम लागू पडतात. गणिताच्या दृष्टीने बीजगणितात आणि अक्षरगणितात साम्य नाही. म्हणून तर अक्षरगणितात प्रत्येक अक्षराची किंमत ० ते ९ पर्यंत मर्यादित असते. त्यापुढे ती जाऊच शकत नाही', प्रा. रंगराव मुलांना अक्षरगणित समजावून सांगत होते.

नंतर फळ्यावर

स × रस = फणस

\+   +   −

नर × नर = नवस

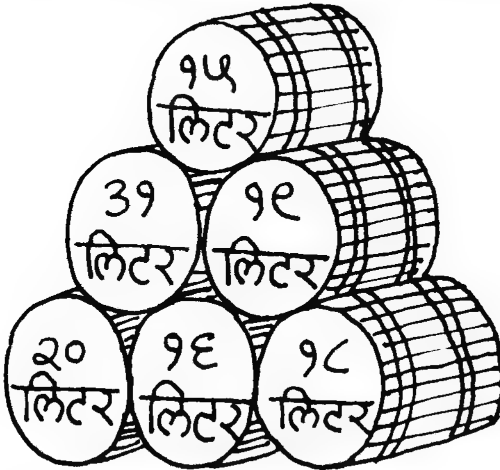
फल + सल = बल

असे अक्षरगणित लिहून झाल्यावर ते मुलांना म्हणाले, 'आता फळ्यावर दिलेले अक्षरगणित मी अगोदर सांगितलेल्या महितीच्या आधारे सोडवा पाहू!



४२. फळांचा रस

उन्हाळ्यात फळांच्या रसाची मागणी वाढते ही गोष्ट लक्षात घेऊनच उत्तमचंद या घाऊक व्यापाऱ्याने फळांच्या रसाने भरलेली वेगवेगळ्या



क्षमतेची सहा सीलबंद पिंपे खरेदी करून विक्रीस ठेवली. त्यापैकी पाच पिंपांत आंबरस भरलेला होता तर एका पिंपात अननसाचा ताजा रस भरलेला

होता; हे सोबतच्या आकृतीत दाखविले आहे. (पिंपावर फळांच्या रसाचे नाव दिलेले नाही.)

आंबरसाची पिंपे दोन खानावळवाल्यांनी विकत घेतली. एका खानावळवाल्याने दुसऱ्या खानावळवाल्याच्या दुप्पट आंबरस विकत घेतला. अननसाचा रस मात्र उत्तमचंदने त्याच्या 'कोल्ड्रिंक हाऊस'मध्ये विकला. फळांचा रस सुटा न विकता पूर्ण पिंपाच्या रूपात त्याने विकलेला असल्यास अननसाचा रस कोणत्या पिंपात होता, आणि प्रत्येक खानावळवाल्याने किती आंबरस विकत घेतला व तोही कोणत्या पिंपातील ?



४३. 'मग डोळे सारखे' करणारी बेरीज

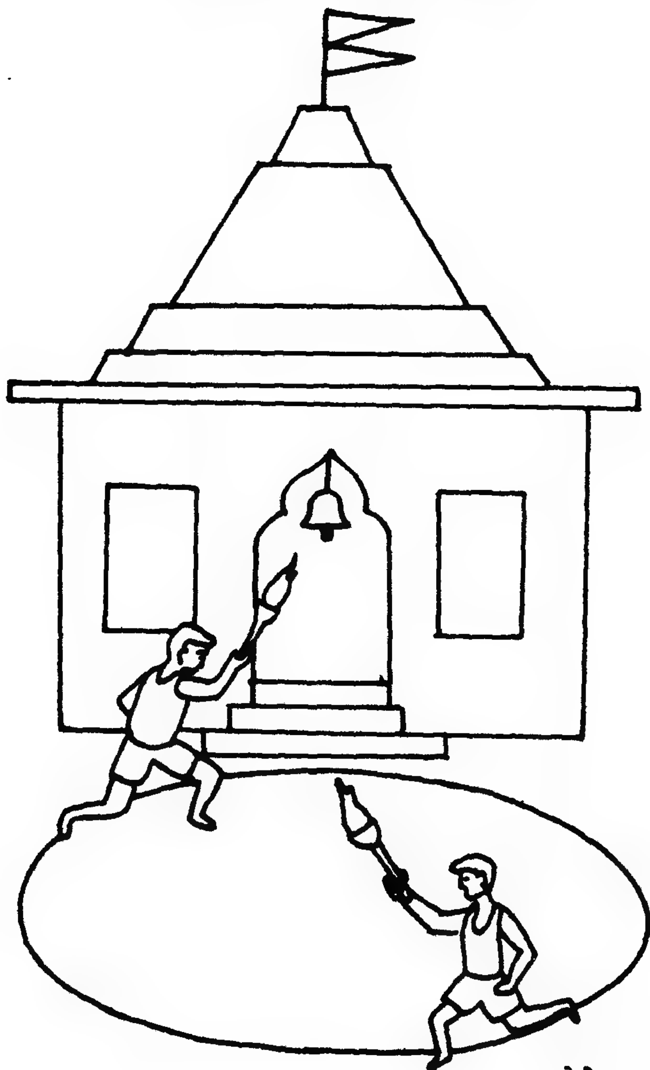
चौधरी गुरुजींनी फळ्यावर पुढील बेरजेचे गणित मांडले.

```
   स ल ग क म ल
 + स द क्ष क म ल
 ---------------
   म ग अ क्ष स म
```

नंतर ते मुलांना म्हणाले, 'मुलांनो, या गणितातील वेगवेगळी अक्षरे वेगवेगळ्या अंकांसाठी आली आहेत. मात्र एक अक्षर एकाच अंकासाठी आले आहे. मग ते अक्षर गणितात कुठंही असलं तर त्याची किंमत कायम राहते. तेव्हा अक्षरांच्या जागी योग्य ते अंक लिहून या अक्षरगणिताचं अंकगणितात रूपांतर करा पाहू!'



४४. रिंगणात वर्तुळाकार फेऱ्या



एका मंदिराच्या समोर ७० मीटर परीघाचे एक रिंगण होते. रिंगणाच्या परिघावर गोलाकार पळत हातात मशाली घेतलेले दोन युवक कायम वेगाने फेऱ्या मारत होते. दोघांचा वेग कायम होता हे जरी खरे असले तरी त्यांच्या व्यक्तिगत वेगामध्ये फरक असल्याने जेव्हा जेव्हा ते एकमेकांच्या विरुद्ध दिशेने फेऱ्या घालत तेव्हा त्यांची दर १० सेकंदाला गाठ पडे आणि जेव्हा ते एकाच दिशेने पळत फेऱ्या घालत तेव्हा जलद पळणारा युवक त्याच्या मानाने संथ पळणाऱ्या युवकाला दर ७० सेकंदांत गाठे. तर मशाली घेऊन पळणाऱ्या दोन्ही युवकांचा वेग काय?



४५. सत जल हव ग!

नित्याप्रमाणे आजही प्राध्यापक रंगरावांनी मुलांना अक्षरांचे सांकेतिक कोडे सोडवायला सांगितले. ते कोडे पुढीलप्रमाणे होते.

```
   म न न ज र न ग
 + न व न ज र म ज
 ----------------
   स त ज ल ह व ग
```

या गणितात अंकांच्या जागी अक्षरे आली आहेत हे नव्याने सांगायला नको. एका **अंका**साठी एक ठराविक अक्षर याप्रमाणे वेगवेगळ्या अंकांसाठी वेगवेगळी **अक्षरे** आली आहेत. पण एका ठराविक अंकासाठी एक ठराविक **अक्षर**च आले **आहे**. दुसऱ्या शब्दांत असे म्हणता येईल की एक ठराविक **अक्षर** एकच एक ठराविक अंक दर्शविते. मग ते अक्षर गणितात कुठल्याही जागी का असेना!

तेव्हा हे अक्षरगणित पुन्हा अंकांमध्ये लिहा बरे!



४६. वाचनालयात आलेली पुस्तके

नगर्से येथील 'श्री स्वस्तिक वाचनाल्या'त ग्रंथपाल म्हणून काम करणारे श्री. साजबा कामत यांना अलीकडे फार काम करावे लागे. गेल्या सोमवारी वाचनाल्यात आलेल्या नव्या पुस्तकांपैकी फक्त काहीच पुस्तकांची नोंद ते वाचनाल्याच्या नोंदवहीत करू शकले. सोमवारी जितक्या पुस्तकांची नोंद त्यांना नोंदवहीत करता आली नाही, नेमकी तितकीच नवी पुस्तके मंगळवारी वाचनाल्यात आली आणि केवळ १२ पुस्तकांची नोंद श्री. साजबा कामत नोंदवहीत करू शकले.



सोमवारी आलेल्या पुस्तकांहून १६ अधिक पुस्तके बुधवारी आली. परंतु नोंदवहीत मात्र सोमवारी नोंदलेल्या पुस्तकांइतकीच नोंद ते करू शकले. बुधवारी नोंद केलेल्या पुस्तकांच्या तिप्पट पुस्तके गुरुवारी आली. परंतु श्री. साजबा मात्र फक्त २० पुस्तकांची नोंद करू शकले. शुक्रवारी १० नवी

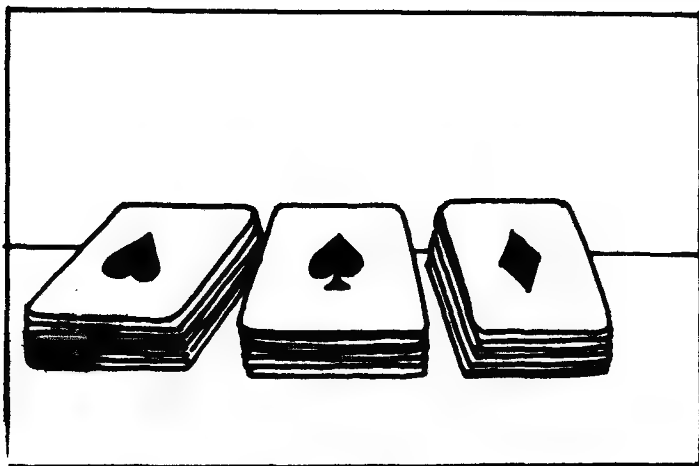
पुस्तके वाचनालयात आली आणि बुधवारी आलेल्या पुस्तकांपेक्षा १६ कमी पुस्तकांची नोंद श्री. साजबा त्या दिवशी करू शकले.

शनिवारी वाचनालय बंद राहत असल्याने त्या दिवशी श्री. साजबा कामतांची खऱ्या अर्थाने सुटका झाली. त्या दिवशी वाचनालयात एकही नवे पुस्तक आले नाही आणि उरलेल्या सगळ्या २४ नव्या पुस्तकांची नोंद ते निवांतपणे करू शकले. तर बुधवारी वाचनालयात किती नवी पुस्तके आली होती ?



४७. पत्त्यांचे गठ्ठे

वेळ जाईना तेव्हा जयने खेळायच्या पत्त्यांचा एक ५२ पानी जोड घेतला आणि त्याची तीन गठ्ठ्यांत विभागणी केली; तेव्हा त्याला असे



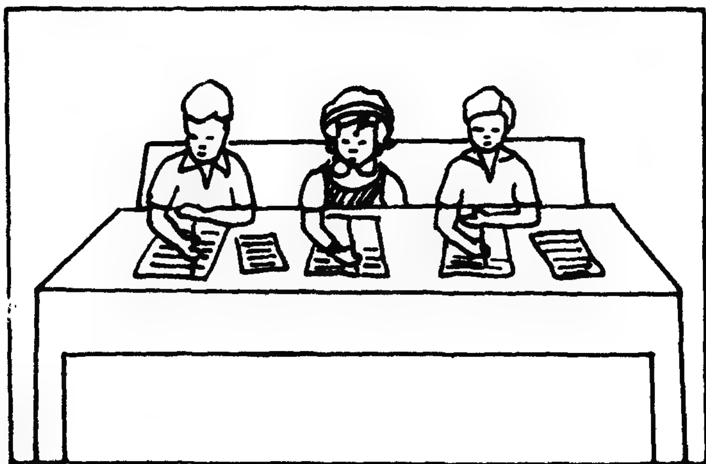
आढळून आले की त्याने केलेल्या पहिल्या गठ्ठ्यात लाल पानांची संख्या काळ्या पानांच्या संख्येच्या तिप्पट होती. याउलट प्रकार दुसऱ्या गठ्ठ्यात

होता. त्या गठ्ठ्यात लाल पानांची संख्या काळ्या पानांच्या संख्येच्या एक तृतीयांश होती आणि तिसऱ्या गठ्ठ्यात लाल पाने काळ्या पानांच्या दुप्पट होती. तर प्रत्येक गठ्ठ्यात किती लाल पाने आणि किती काळी पाने होती हे तुम्ही सांगाल का?



४८. चाचणी परीक्षा

मराठीच्या चाचणी परीक्षेसंबंधी तीन विद्यार्थ्यांमध्ये चर्चा चालली होती. वर्गातील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांच्या सरासरीपेक्षा भप्पीला ५ गुण कमी पडले होते आणि बीनाला ७ गुण अधिक पडले होते, तर मनूला ७३ गुण

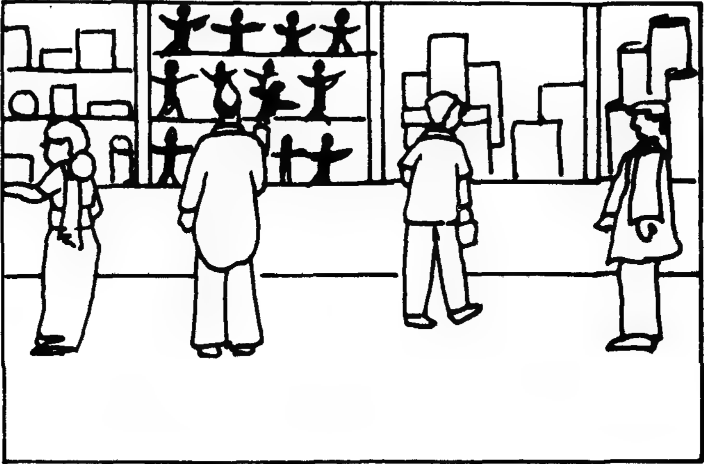


मिळाले होते. तिन्ही मुलांना मिळालेल्या गुणांची सरासरीही वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या गुणांच्या सरासरीइतकीच होती. तर भप्पीला आणि बीनाला प्रत्येकी किती गुण मिळाले होते?



४९. रक्तचंदनाच्या बाहुल्या

तीर्थयात्रा करायला गेलेल्या गोरखनाथाने आपल्या मित्रमंडळींना भेटवस्तू देण्यासाठी एका तीर्थक्षेत्री ८१२ रुपयांच्या मोबदल्यात काही रक्तचंदनाच्या



बाहुल्या खरेदी केल्या. खरेदी केलेल्या बाहुल्यांची संख्या पूर्ण रुपयांत मोजलेल्या एका बाहुलीच्या किंमतीहून एकाने अधिक असेल, तर त्या तीर्थक्षेत्री गोरखनाथाने किती बाहुल्या खरेदी केल्या होत्या ?



५०. अपूर्णांकांना संक्षिप्त रूप द्यायची मजेशीर पद्धत

गणिताच्या प्रश्नपत्रिकेत, पुढील व्यावहारिक अपूर्णांकांची संक्षिप्त रूपे शोधून काढा.

$$\frac{२६}{६५}, \frac{१६}{६४}, \frac{१९}{९५} \text{ आणि } \frac{४९}{९८}$$

असा एक प्रश्न होता. हा प्रश्न सोडवताना दत्ताने पुढील पद्धतीचा वापर करून अपूर्णांकांची संक्षिप्त रूपे शोधून काढली. त्याची उत्तरेही बरोबर होती.

$$\frac{२\cancel{६}}{\cancel{६}५} = \frac{२}{५}$$

$$\frac{१\cancel{६}}{\cancel{६}४} = \frac{१}{४}$$

$$\frac{१\cancel{९}}{\cancel{९}५} = \frac{१}{५}$$

$$\frac{४\cancel{९}}{\cancel{९}८} = \frac{४}{८} = \frac{१}{२}$$

परंतु ही मजेशीर वाटणारी पद्धत बरोबर आहे का ?



उत्तर विभाग

१. फुले

फुलांची संख्या दहाहून जास्त नसती तर ती संख्या केवळ ७ असती. कारण ६ फुलांचा एक गुच्छ केला की १ फूल उरते, तर ५ फुलांचा एक गुच्छ केला असता २ फुले उरतात. परंतु फुलांची संख्या दहाहून जास्त आहे आणि प्रत्येक मुलीने एकाहून जास्त गुच्छ केले आहेत. म्हणून ५ आणि ६ चा ल. सा. वि. काढू आणि नंतर त्यात ७ मिळवू. ५ आणि ६ चा ल. सा. वि. ३० आहे आणि त्यात ७ मिळविले की ३७ मिळतात.

पडताळा : ३७ ला ६ ने भागल्यास शेष १ उरतो आणि ५ ने भागल्यास शेष २ उरतात. म्हणजे उत्तर बरोबर.

म्हणून चंपा आणि गुलाब या दोन्ही मुलींकडे सुरुवातीला प्रत्येकी ३७ फुले होती.



२. झुलवाचा कपडालत्ता

वर्षाला १५०० रुपये रोख मोबदला या हिशेबाने झुलवाच्या आई-वडिलांना मानाशेठनी ७ महिन्याचे

$$\frac{१५००}{१} \times \frac{७}{१२} = ८७५ \text{ रुपये}$$

द्यायला हवे होते. पण त्यांनी प्रत्यक्षात ८०० रुपये त्यांना दिले. म्हणजेच त्यांनी ७५ रुपये कमी दिले. हे ७५ रुपये त्यांनी कपड्यालत्त्याच्या

खर्चापायी कमी दिले होते. याचाच अर्थ झुल्वाने ५ महिने काम न केल्याने तिच्या कपड्यालत्त्यासाठी ७५ रुपये कमी पडले. म्हणजेच दर महिन्याला झुल्वाच्या कपड्यालत्त्यासाठी मानाशेठ १५ रुपये बाजूला काढून ठेवत.

∴ झुल्वाच्या कपड्यालत्त्याची किंमत १५ × १२ = १८० रुपये आहे.

हेच कोडे आपण बीजगणिताच्या साहाय्यानेही सोडवू शकतो.

दरवर्षी मानाशेठ झुल्वाला देत असलेल्या कपड्यालत्त्याची किंमत क्ष रुपये आहे असे आपण मानू.

∴ तिला दरवर्षाला एकूण (१५०० + क्ष) रुपये मिळतात.

∴ तिला ७ महिन्याच्या नोकरीबद्दल

$$(१५०० + क्ष) \times \frac{७}{१२} \text{ रुपये}$$

इतका मोबदला मिळाला पाहिजे.

परंतु मानाशेठनी तिला प्रत्यक्षात (८०० + क्ष) रुपये दिले.

$$\therefore (१५०० + क्ष) \times \frac{७}{१२} = ८०० + क्ष$$

दोन्ही बाजूंना १२ ने गुणले असता

$$१०५०० + ७\,क्ष = ९६०० + १२\,क्ष$$

$$\therefore ५\,क्ष = ९००$$

$$\therefore क्ष = १८०$$

∴ झुल्वाच्या कपड्यालत्त्याची किंमत १८० रुपये आहे.



३. भास्करचे बिल

सरासरी बिल 'क्ष' रुपये होते असे मानू. म्हणून ७ विद्यार्थ्यांनी बिलापोटी भरलेली एकूण रक्कम ७क्ष रुपये असणार.

भास्कर वगळता इतर ६ विद्यार्थ्यांनी प्रत्येकी १५ रुपये मोजलेले असल्याने त्यांनी एकूण ९० रुपये दिले.

साहजिकच भास्करने (७क्ष – ९०) रुपये दिले. परंतु ही रक्कम सरासरी बिलापेक्षा ६ रुपयांनी जास्त आहे.

$$\therefore (७क्ष - ९०) = क्ष + ६$$
$$\therefore ६क्ष = ९६$$
$$\text{आणि } क्ष = १६$$

याचाच अर्थ भास्करला बिलापोटी १६ + ६ म्हणजे २२ रुपये द्यावे लागले.



४. मास्टर फेणेचा सरासरी वेग

मास्टर फेणेला शर्यतीचे पहिले निम्मे अंतर म्हणजे अर्धा मैल अंतर पार करायला १०० सेकंद लागले. याचा अर्थ त्याने ते अंतर ताशी

$$\frac{\overset{३}{\cancel{६०}} \times \cancel{६०}}{\cancel{१००}} \times \frac{१}{\underset{१}{\cancel{२}}} = १८$$ मैल वेगाने तोडले.

पुढचे पाव मैलाचे अंतर त्याने ताशी १५ मैल वेगाने पार केले. म्हणून हे पाव मैल अंतर तोडण्यास त्याला

१५ ४

$\frac{१}{४} \times \frac{१}{१५} \times \frac{६०}{१} \times \frac{६०}{१}$ = ६० सेकंद लागले.

शेवटचे पाव मैल अंतर त्याने सुरुवातीच्या वेगाच्या ५/९ पटीत म्हणजेच

२

$\frac{१८}{१} \times \frac{५}{९}$ = १० मैल वेगाने तोडले आहे.

१

याचाच अर्थ ताशी १० मैल वेगाने १/४ मैल अंतर धावण्यास त्याला

१५

$\frac{१}{१०} \times \frac{१}{४} \times \frac{६०}{१} \times \frac{६०}{१}$ = ९० सेकंद लागले.

१

यावरून शर्यतीतील एक मैल अंतर धावून पार करण्यास मास्टर फेणेला १०० + ६० + ९० = २५० सेकंद लागले. मास्टर फेणेने २५० सेकंदांत १ मैल अंतर पार केले. यावरून त्याचा धावण्याचा सरासरी ताशी वेग

१२

$\frac{६० \times ६०}{१} \times \frac{१}{२५०} = \frac{७२}{५}$ मैल किंवा १४.४ मैल होता.

५

म्हणून मास्टर फेणेचा या शर्यतीतील धावण्याचा सरासरी वेग ताशी १४.४ मैल होता.



५. द्रोणातील बोरे

दोनाच्या, तिनाच्या, चाराच्या गटात बोरे मोजली असता ज्याअर्थी प्रत्येक वेळी एक-एक बोर उरले त्याअर्थी बोराची संख्या २, ३ आणि ४ यांनी नि:शेष भाग जाणाऱ्या संख्येहून एकाने जास्त होती. आता नि:शेष भाग जाणारी संख्या शोधून काढण्यासाठी आपण २, ३ आणि ४ चा ल. सा. वि. काढू, तो १२ आहे. म्हणजे बोरांची संख्या १३ आहे. द्रोणात १३ बोरे असणे शक्य नाही. कारण १३ ला ५ ने नि:शेष भाग जात नाही.

म्हणून १२ ही संख्या पटीत वाढवून तीत १ मिळवा आणि येणाऱ्या संख्येला ५ ने नि:शेष भाग जातो की नाही ते पाहा.

१२ ची दुप्पट २४. त्यात १ मिळविला की २५ मिळतात आणि २५ ला ५ ने नि:शेष भाग जातो.

म्हणून बज्याने द्रोणात २५ बोरे घेतली होती.



६. पाहा हं, चुकाल!

आपण शेवटला अंक 'क्ष' मानू. म्हणून पहिला अंक '२ क्ष' असेल. तसेच तिसरा अंक 'य' मानू म्हणजे दुसरा अंक '२ य' असेल.

∴ क्ष + २ क्ष = २ (२ य)

∴ ३ क्ष = ४ य

म्हणून क्ष = ४/३ य

'क्ष' ची किंमत पूर्णांकात यायला य = ३ किंवा ६ असले पाहिजेत. परंतु य = ६ असू शकत नाहीत कारण तसे झाल्यास दुसरा अंक १२ म्हणजे दोन अंकी होतो. हे शक्य नाही. म्हणून य = ६ नाही. म्हणून य = ३.

याचाच अर्थ क्ष = ४.

यावरून शेवटचा अंक ४, पहिला अंक ८, तिसरा अंक ३ आणि दुसरा अंक ६.

म्हणून ती संख्या ८६३४ आहे.



७. अष्टपैलू अंक

मला वाटतं, ६ हा अंक सोडून १ ते ९ पर्यंतच्या प्रत्येक अंकाची पुढे दिल्याप्रमाणे एकावेळी आठदा मांडणी केल्यास एक हजार मिळतात.

(प) $१ \times (११११ - १११) = १०००$

(फ) $$\frac{२^{२२/२}}{२} - (२२ + २) = १०००$$

कारण

$$\frac{२^{११}}{२} - (२४) = २^{१०} - २४$$

$$= १०२४ - २४ = १०००$$

किंवा

$$२(२२)^{२} + २(२ + २)^{२} = १०००$$

कारण $२ \times ४८४ + २ \times १६ = ९६८ + ३२ = १०००$

(ब) $$३३३ \times ३ + \frac{३३}{३३} = १०००$$

कारण $९९९ + \frac{१}{१} = १०००$

(भ) $४ \times ४^{४} - [४(४ + \frac{४}{४}) + ४] = १०००$

कारण $४ \times २५६ - (४ \times ५ + ४)$

$= १०२४ - २४ = १०००$

(म) $[(५ \times ५) + (५ \times ५)](५ + ५ + ५ + ५) = १०००$

कारण $(२५ + २५) \times (२०) = ५० \times २० = १०००$

किंवा

$$(५ + ५)(५ + ५)(५ + ५) \times \frac{५}{५} = १०००$$

कारण $१० \times १० \times १० \times \frac{१}{१} = १०००$

(य) $७७(७ + ७) - (७७ + \frac{७}{७}) = १०००$

कारण $७७ \times १४ - ७८$

$= १०७८ - ७८ = १०००$

(र) $८८८ + ८८ + ८ + ८ + ८ = १०००$

कारण $९७६ + २४ = १०००$

(ल) $९९ \times ९ + ९९ + ९ + \frac{९}{९} = १०००$

कारण

$८९१ + ९९ + १०$

$= ८९१ + १०९ = १०००$

❇ ✱ ❇

८. बगारामांचे वय

आपण बगारामांचे आजचे वय 'क्ष' वर्षे आहे असे मानू. साहजिकच बगारामांचे पाच वर्षांनी वय (क्ष + ५) वर्षे असेल तर पाच वर्षांपूर्वी त्यांचे वय (क्ष – ५) वर्षे होते.

म्हणून बगारामांच्या म्हणण्यानुसार

$$क्ष = ५(क्ष + ५) - ५(क्ष - ५)$$

$$\therefore क्ष = ५(क्ष + ५ - क्ष + ५)$$

$$\therefore क्ष = ५ \times १० = ५०$$

पडताळा : बगारामांचे पाच वर्षांनंतरचे वय ५५ वर्षे आहे आणि त्यांचे पाच वर्षांपूर्वीचे वय ४५ वर्षे होते

∴ ५ × ५५ – ५ × ४५ एवढे त्यांचे आताचे वय असले पाहिजे.

$$\therefore ५(५५ - ४५) = ५ \times १० = ५०$$

∴ बगारामांचे आजचे वय ५० वर्षे आहे.



९. निरावयवांनी बनलेला जादूचा चौरस

जादूच्या चौरसातील मध्यवर्ती घरात कोणता निरावयव लिहायचा हे ठरवले की हे कोडे चुटकीसरशी सुटते. ते ठरविणे सोपे आहे. कर्णावर दिलेल्या दोन घरांतील निरावयवांची बेरीज करून तिची निम्मी केली की काम फत्ते. म्हणून

$$\frac{१}{२}(४३ + ३१) = \frac{१}{२}(७४) = ३७$$

हा निरावयव मध्यवर्ती घरात लिहिला की एका कर्णावरील घरे पूर्ण होतात आणि बेरीज ४३ + ३७ + ३१ = १११ मिळते.

वरच्या रांगेतील डाव्या घरात म्हणून

१११ – (१ + ४३) = १११ – ४४ = ६७ हा निरावयव लिहावा लागेल. साहजिकच दुसऱ्या कर्णावरील खालच्या घरात १११ – (६७ + ३७) = १११ – १०४ = ७ हा निरावयव येईल. अशा पद्धतीने उभ्या स्तंभाच्या

मधल्या घरात १३, दुसऱ्या स्तंभाच्या तळाच्या घरात ७३ आणि तिसऱ्या स्तंभाच्या मधल्या घरात ६१ येतील. या साऱ्या संख्या निरावयवी आहेत.

म्हणून निरावयवांनी बनलेला जादूचा चौरस पुढीलप्रमाणे दिसेल.

६७	१	४३
१३	३७	६१
३१	७३	७



१०. शतरूपाचे वास्तव्य

अ) सकाळी पाऊस आणि संध्याकाळी स्वच्छ ऊन.

ब) निरभ्र सकाळ आणि पावसाळी संध्याकाळ.

क) निरभ्र सकाळ आणि स्वच्छ उन्हाची संध्याकाळ

असे तीन प्रकारचे दिवस शतरूपाच्या अनुभवाला आलेले आहेत.

या प्रत्येक प्रकारचे अनुक्रमे अ, ब आणि क दिवस होते असे आपण मानू.

∴ पाऊस पडलेले एकूण दिवस

= अ + ब = १५....(१)

∴ निरभ्र सकाळ असलेले एकूण दिवस

= ब + क = ११....(२)

∴ संध्याकाळी स्वच्छ ऊन पडलेले एकूण दिवस

= क + अ = १४....(३)

समीकरण (१) मधून समीकरण (२) वजा करू.

$$अ + ब = १५$$
$$ब + क = ११$$
$$- \quad - \quad -$$
$$अ - क = ४ \ldots (४)$$

समीकरण (३) आणि (४) ची बेरीज करू.

$$अ + क = १४$$
$$अ - क = ४$$
$$२अ = १८$$

$\therefore$ अ = ९ साहजिकच ब = ६ आणि क = ५

$\therefore$ शतरूपाने थंड हवेच्या ठिकाणी घालवलेले एकूण दिवस = अ + ब + क = ९ + ६ + ५ = २०.

हेच कोडे १ ते ३ ह्या तिन्ही समीकरणांची बेरीज करूनही सोडवता येते.

$$अ + ब = १५ \ldots (१)$$
$$ब + क = ११ \ldots (२)$$
$$क + अ = १४ \ldots (३)$$
$$२(अ + ब + क) = ४०$$

$\therefore$ (अ + ब + क) = २०.

$\therefore$ शतरूपाने थंड हवेच्या ठिकाणी एकूण वीस दिवस वास्तव्य केले.



११. साखरेची खरेदी

श्रीमती माधुरी साखरेने ९ रु.२० पै. दराने 'क्ष' किलो साखर घेतली असे आपण समजू. म्हणजे तिची एकूण खरेदी (९.२ × क्ष) रुपयांची झाली.

वाण्याकडून ४० पैसे कमी दराने म्हणजे ९.२० − ०.४० = ८.८० रुपये दराने तिने जर साखर घेतली असती तर अगोदर साखरेवर खर्च केलेल्या पैशात १ किलो साखर जास्त मिळाली असती म्हणजेच तिच्याकडील साखर (क्ष + १) किलो झाली असती व तिचा खर्च [(८.८(क्ष + १)] रुपये झाला असता.

दोन्ही वेळच्या खरेदीची रक्कम सारखीच आहे.

म्हणून ९.२ क्ष = ८.८ (क्ष + १)

किंवा ९.२ क्ष = ८.८ क्ष + ८.८

∴ ०.४ क्ष = ८.८

∴ क्ष = २२

हेच कोडे अंकगणिताच्या साहाय्यानेही सोडवता येते. श्रीमती माधुरी साखरेने ९.२० रुपये किलो या भावाने साखर घेतली. वाण्याकडील साखरेचा भाव किलोला ४० पैशांनी कमी होता. म्हणजेच तो ८ रु.८० पैसे होता.

ज्याअर्थी भावात ४० पैसे फरक असताना १ किलो साखर घेतली जाते त्याअर्थी ८ रु.८० पैसे फरक असण्यासाठी

$\frac{८८०}{४०}$ = २२ किलो साखर घ्यावी लागेल.

पडताळा : ९२० × २२ = २०२४०

आणि ८८० × २३ = २०२४०

म्हणून श्रीमती माधुरी साखरेने ९.२ × २२ = २०२ रु. ४० पैसे खर्च केले.



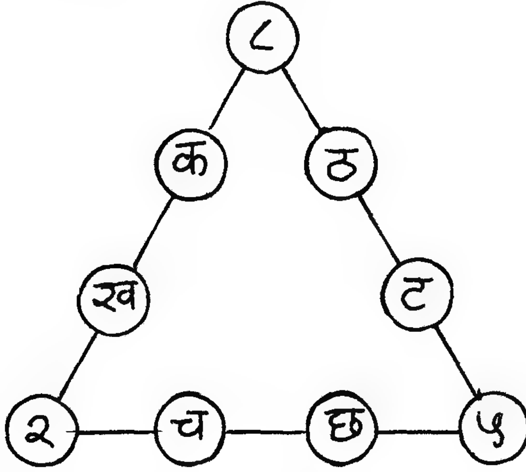
१२. प्रत्येक बाजूवरील बेरीज वीस

प्रथम आपण रिकाम्या गोळ्यांना सोबतच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे क, ख, च, छ, ट आणि ठ अशी नावे देऊ.

नंतर डाव्या बाजूवरील गोळ्यांतील अंकांची बेरीज करू.

$$८ + क + ख + २ = २०$$

$$\therefore क + ख = २० - १० = १०$$



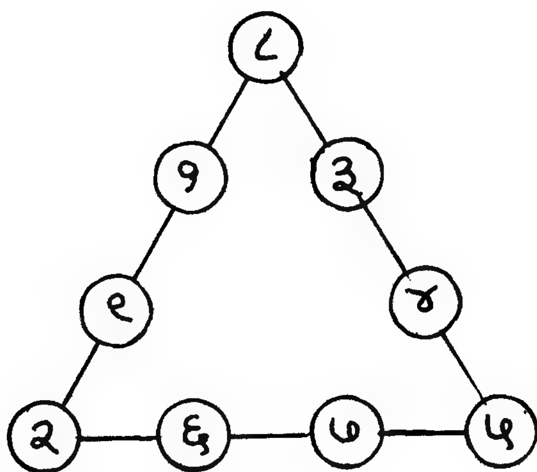
१ ते ९ पर्यंतचे अद्याप त्रिकोणातील गोळ्यांत न लिहिलेले अंक आहेत – १, ३, ४, ६, ७ आणि ९. यापैकी कोणकोणत्या अंकांची जोडी दहा बेरीज देते ते पाहू. त्या जोड्या आहेत १ व ९, ३ व ७ आणि ४ व ६.

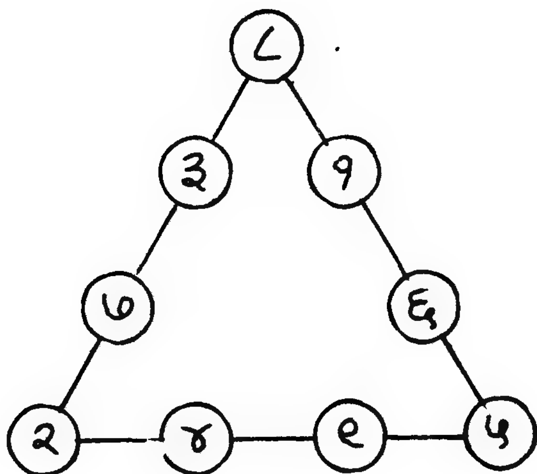
नंतर त्रिकोणाच्या पायावरील गोळ्यांतील अंकांची बेरीज करू.

$$२ + च + छ + ५ = २०$$

$$\therefore च + छ = २० - ७ = १३$$

४ व ९ आणि ६ व ७ या दोनच जोड्या १३ बेरीज देतात. शेवटी उजव्या बाजूवरील गोळ्यांची बेरीज करू.


८
१
३
९
४
२
६
७
५


८
३
१
७
६
२
४
९
५

$८ + ट + ठ + ५ = २०$

$\therefore ट + ठ = २० - १३ = ७$

१ व ६ आणि ३ व ४ या जोड्या ७ बेरीज देतात.

पायावरील आणि उजव्या बाजूवरील गोळ्यांत येऊ शकणाऱ्या ज्या एकूण चार जोड्या आहेत, त्या प्रत्येक जोडीत ४ हा तरी अंक आहे किंवा ६ हा तरी अंक आहे, म्हणून डाव्या बाजूवरील गोळ्यांत ४ आणि ६ ही जोडी एकत्र येऊ शकत नाही. म्हणजेच ती बाद ठरते. साहजिकच डाव्या बाजूसाठीही केवळ दोनच जोड्या उरतात.

त्यामुळे आपल्याला कोड्याची वरीलप्रमाणे दोन उत्तरे मिळतात.



२३. अज्ञात अंक

आपण माहीत नसलेला म्हणजेच 'आणखी एक अज्ञात अंक' 'क्ष' आहे असे मानू. साहजिकच ती तीनअंकी संख्या पुढीलप्रमाणे असणार.

$९०० + ५० + क्ष = (९५० + क्ष) ....(१)$

याच संख्येतील अंकांचा क्रम उलटा केला असता मिळणारी संख्या असेल

$१०० क्ष + ५० + ९ = (१०० क्ष + ५९) ....(२)$

संख्या (१) मधून संख्या (२) वजा केली असता काय संख्या मिळते ते पाहू!

$(९५० + क्ष) - (१०० क्ष + ५९) = ८९१ - ९९ क्ष$

संख्येमध्ये तीन अंक ६ प्रकारे मांडता येतात. यापैकी दोन प्रकारची मांडणी आपण वर दिलेल्या दोन संख्यांत केली आहे.

म्हणून उरलेल्या ४ मांडण्यांपैकी आपणाला कोणतीही एक मांडणी करता येईल. या चारांपैकी आपण पुढील मांडणी करू. ती म्हणजे

१०० क्ष + ९० + ५ म्हणजेच (१०० क्ष + ९५). वजाबाकीचे उत्तर (८९१ − ९९ क्ष) असल्याने ही उत्तराची संख्या तिसऱ्या मांडणीइतकी असली पाहिजे.

∴ १०० क्ष + ९५ = ८९१ − ९९ क्ष

∴ १९९ क्ष = ८९१ − ९५ = ७९६

∴ क्ष = ७९६ ÷ १९९ = ४

∴ अज्ञात अंक ४ हा आहे.

ताळा : पहिली संख्या ९५० + क्ष म्हणजे ९५४.

दुसरी संख्या १०० क्ष + ५९ म्हणजे ४५९.

आणि तिसरी संख्या १०० क्ष + ९५ म्हणजे ४९५.

आता ९५४ − ४५९ = ४९५

∴ ४ हे उत्तर बरोबर आहे.



१४. धेनुदासांचा धनादेश

आपण धेनुदासांचा धनादेश 'क्ष' रुपये आणि 'य' पैशांचा होता असे समजू म्हणजेच धनादेश (१०० क्ष + य) पैशांचा होता. पण रोखपालाच्या चुकीमुळे धेनुदासांना (१०० य + क्ष) पैसे मिळाले. त्यातील २० पैसे खर्च केल्यावर उरलेली रक्कम (१०० क्ष + य) पैशांच्या दुप्पट होती.

∴ (१०० य + क्ष) − २० = २(१०० क्ष + य)

∴ १०० य + क्ष − २० = २०० क्ष + २ य

∴ ९८ य − १९९ क्ष = २०

किंवा य = $\frac{२० + १९९ क्ष}{९८}$.

'क्ष' आणि 'य' प्रत्येकी रुपये आणि पैसे असल्याने ते धन पूर्णांक आहेत. म्हणून 'क्ष'ची किंमत अशा पद्धतीने निवडली पाहिजे की 'य' धन पूर्णांक असेल.

क्ष = १ मानून २० + १९९ ला ९८ ने भागल्यास २३ शेष राहतात. यातील २० स्थिर आहेत तर १९९ ला १ ने गुणून ९८ ने भागल्यास ३ मिळतात. शेष ९८ उरल्यास मात्र ९८ ने पूर्ण भाग जाईल. या ९८ तील २० स्थिर आहेत. म्हणून १९८ × क्ष ÷ ९८ ह्या क्रियेनंतर ७८ शेष राहिले पाहिजेत.

३ शेष राहतात तेव्हा क्ष = १ असतो.

$\therefore$ ७८ शेष राहण्यासाठी क्ष $= \frac{७८}{३} \times \frac{१}{१} =$ २६ असले पाहिजेत.

म्हणून $\frac{२० + १९९ क्ष}{९८}$ मध्ये क्ष = २६ लिहू.

म्हणजे $\frac{२० + १९९ \times २६}{९८} = \frac{२० + ५१७४}{९८}$

$= \frac{५१९४}{९८} = ५३$

म्हणजेच क्ष = २६ किंवा य = ५३.

म्हणून धेनुदासांचा धनादेश २६ रुपये ५३ पैशांचा होता.

पडताळा : ५३रु.२६पै. – २०पै. = ५३.०६

२६.५३ × २ = ५३.०६

म्हणून धेनुदासांचा धनादेश २६ रुपये ५३ पैशांचा होता हे उत्तर बरोबर.



१५. मैलाचे दगड

अ) एकच एक अंक असलेला मैलाचा एकही दगड असणे शक्य नाही. दोन शहरांतील अंतर जर एकाच सम अंकाने दाखवता आले असते तर त्या शहरांना जोडणाऱ्या रस्त्याच्या मध्यभागी असा मैलाचा एक दगड असता. उदा. दोन शहरांतील अंतर ६६ किंवा ८८ किंवा ४४४ मैलाचे असते तर अंतराच्या मध्यावरचा दगड

$\frac{३३}{३३}$ किंवा $\frac{४४}{४४}$ किंवा $\frac{२२२}{२२२}$ असा असता.

(ब) या दोन शहरांच्या दरम्यान फक्त दोन वेगवेगळे अंक असलेले १८ दगड आहेत.

यापैकी रस्त्याच्या एका टोकापासून मध्यापर्यंतचे ९ दगड पुढीलप्रमाणे असतील.

९	११	१८	२२	२७	३३	३६	४४	४५
९०	८८	८१	७७	७२	६६	६३	५५	५४

तर रस्त्याच्या मध्यापासून ते दुसऱ्या टोकापर्यंतचे ९ दगड पुढीलप्रमाणे असतील.

५४	५५	६३	६६	७२	७७	८१	८८	९०
४५	४४	३६	३३	२७	२२	१८	११	९



१६. दोन अडथळ्यांतील अंतर

स्पर्धेत उतरायच्या वेळेस ६ अडथळे पार पाडायला पी. मुरुगनला केवळ ३० ढेंगा टाकाव्या लागत.

साहजिकच एक अडथळा पार पाडण्यास त्याला केवळ ५ ढेंगा टाकाव्या लागत.

म्हणजेच ढेंगा ६ इंचाने वाढविल्याने पूर्वीच्या एका ढेंगेची बचत झाली.

५ नवीन ढेंगांत पूर्वीचेच अंतर तोडून तो अडीच फूट अंतर अधिक जात होता.

याचाच अर्थ पूर्वीची सहावी ढेंग अडीच फूट लांबीची होती.

साहजिकच नवीन ढेंगेची लांबी तीन फूट होती.

म्हणून दोन अडथळ्यांतील अंतर पूर्वीच्या ढेंगांप्रमाणे

$\frac{५}{\cancel{२}} \times \frac{\cancel{६}^{३}}{१}$ = १५ फूट होते.

आणि वाढीव लांबीच्या ढेंगांप्रमाणेही

$\frac{३}{१} \times \frac{५}{१}$ = १५ फूट होते.

∴ दोन अडथळ्यांतील अंतर १५ फूट होते हे उत्तर.



१७. पार्टीला जमलेली मुले

पार्टीला जमलेल्या मुलांची संख्या 'क्ष' होती असे आपण मानू.

साहजिकच जिलेबीसाठी २ मुलांमध्ये १ बशी याप्रमाणे 'क्ष' मुलांसाठी पार्टीत $\frac{क्ष}{२}$ बशा लागल्या.

भावनगरी गाठ्यांसाठी ३ मुलांमध्ये १ बशी याप्रमाणे 'क्ष' मुलांसाठी पार्टीत $\frac{क्ष}{३}$ बशा लागल्या.

आणि शेवेसाठी ४ मुलांमध्ये १ बशी याप्रमाणे 'क्ष' मुलांसाठी पार्टीत $\frac{क्ष}{४}$ बशा लागल्या.

पार्टीत एकूण ७८ बशांचा वापर करण्यात आला होता.

$$\therefore \frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३} + \frac{क्ष}{४} = ७८$$

$$\therefore \frac{६\,क्ष + ४\,क्ष + ३\,क्ष}{१२} = ७८$$

$$\therefore १३\,क्ष = ७८ \times १२$$

$$\text{आणि } क्ष = \frac{\overset{६}{\cancel{७८}}}{\underset{१}{\cancel{१३}}} \times \frac{१२}{१} = ७२$$

याचाच अर्थ पार्टीला ७२ मुले जमली होती.

ताळा :

जिलेबीसाठी ७२ मुलांना ७२ ÷ २ = ३६ बशा

भावनगरी गाठ्यांसाठी ७२ मुलांना ७२ ÷ ३ = २४ बशा

शेवेसाठी ७२ मुलांना ७२ ÷ ४ = १८ बशा

एकूण = ७८ बशा



१८. देळ्यातील वयोवृद्ध वाघ

श्री. वाघ वृद्ध असल्याने आणि सौ. वाघांच्या व त्यांच्या मुलांच्या वयाच्या गुणाकाराच्या उत्तरात १ हा अंक पुन्हा पुन्हा येत असल्याने आपण ते उत्तर १११ होते असे मानू आणि त्याचे गुणक काढू. ते येतात

१ × ३ × ३७. म्हणजे सौ. वाघांचे वय ३७ व दोन मुलांचे वय अनुक्रमे ३ व १ वर्षे आहे. म्हणून श्री. वाघांचे वय १ + ३ + ३७ = ४१ वर्षे आहे. हे शक्य नाही कारण श्री. वाघांचे वय सम आहे. म्हणजेच गुणाकाराचे उत्तर १११ नाही. ते ११११ आहे असे मानू. याचे गुणक आहेत १ × ११ × १०१. श्री. वाघ कुटुंबियांत कोणाचेही वय शंभरहून अधिक नाही, म्हणून गुणाकाराचे उत्तर ११११ संभवत नाही. कदाचित ते ११११११ असेल. परंतु ११११११ चा १ सोडता दुसरा कोणताही गुणक शंभराहून लहान नाही. कदाचित ११११११ हा निरावयवही असेल. याचाच अर्थ गुणाकाराचे उत्तर ११११११ नाही.

ते १११११११ असेल. आता १११११११ चे गुणक काढू. ते आहेत १ × ३ × ७ × ११ × १३ × ३७. दुसरी गोष्ट म्हणजे गुणक सहा आहेत व गुणाकाराच्या उत्तरात १ ही सहा वेळा आला आहे. म्हणजेच १ हा अंक सौ. वाघ आणि त्यांच्या मुलांची संख्या इतक्या वेळा आला आहे. आता सर्व गुणकांची बेरीज करू. १ + ३ + ७ + ११ + १३ + ३७ = ७२. ही संख्या सम आहे.

यावरून श्री. वाघांचे वय ७२ वर्षे, सौ. वाघांचे वय ३७ वर्षे आणि त्यांच्या मुलांची वये अनुक्रमे १३, ११, ७, ३ व १ वर्षे अशी आहेत.



१९. असे अंक शोधून काढणार ?

प्रथम आपण १४४ चे मूळ अवयव (मूळ अवयवाला निरावयव असेही म्हणतात.) काढू.

ते आहेत २ × २ × २ × २ × ३ × ३.

तीन अंकांची बेरीज १९ अशी विषम संख्या असल्याने तिन्ही अंक विषम तरी असतील किंवा एक अंक विषम व दोन अंक सम तरी असतील.

१४४ चे ४ गुणक २ असल्याने तिन्ही अंक विषम असणे शक्य नाही. म्हणून केवळ एकच एक अंक विषम असेल. हा विषम अंक ३ किंवा ९ असू शकतो.

यातील विषम अंक ३ मानला तर इतर दोन सम अंक ४ आणि १२ असतील. परंतु विषम अंक ९ मानल्यास इतर दोन सम अंक २ आणि ८ असतील.

यापैकी आपणास हवा असलेला संच कोणता हे माहीत करून घेण्यासाठी आपण प्रत्येक संचातील प्रत्येक अंकाच्या वर्गाची बेरीज करून ती १४९ होते का ते पाहू.

पहिला संच	दुसरा संच
$३^२ =$ ९	$९^२ =$ ८१
$४^२ =$ १६	$२^२ =$ ४
$१२^२ =$ १४४	$८^२ =$ ६४
१६९	१४९

यावरून आपणास हवा असलेला संच २, ८ आणि ९ अशा अंकांचा आहे.

म्हणून २, ८ आणि ९ हे तीन अंक आहेत हे उत्तर.



२०. बबलूच्या आईचे वय

बबलूच्या आणि त्याच्या आईच्या वयात (४० – १३) = २७ वर्षांचे अंतर आहे. म्हणून तो १२ वर्षांचा असताना त्याची आई ३९ वर्षांची, ११ वर्षांचा असताना ३८ वर्षांची, १० वर्षांचा असताना ३७ वर्षांची आणि ९ वर्षांचा असताना ३६ वर्षांची होती. परंतु ३६ वर्षे हे वय ९ च्या चौपट

आहे. म्हणजेच ४ वर्षांपूर्वी बबलूची आई बबलूच्या त्यावेळच्या वयाच्या चौपट वयाची होती.

हीच समस्या बीजगणिताच्या साहाय्यानेही सोडविता येते. बबलूचे वय 'क्ष' वर्षांचे असताना त्याच्या आईचे वय त्याच्या वयाच्या चौपट होते असे मानू. परंतु त्यावेळी तिचे वय (क्ष + २७) वर्षे असेल. हे वय 'क्ष' च्या चौपट आहे.

म्हणून ४ क्ष = क्ष + २७

म्हणून ३ क्ष = २७

म्हणून क्ष = ९

म्हणजेच बबलूचे वय ९ वर्षांचे असताना त्याच्या आईचे वय चौपट म्हणजे ३६ वर्षे होते. म्हणून ४ वर्षांपूर्वी बबलूची आई बबलूच्या त्यावेळच्या वयाच्या चौपट वयाची होती.



२१. बरेचसे अंक गायब झालेला भागाकार

भाजक दोन अंकी आहे तर भागाकाराच्या एकम्स्थानी ३ आहे आणि त्यांचा गुणाकार दोन अंकी आहे. म्हणून भाजक ३३ किंवा ३३ हून लहान आहे. भाजक आणि ३ चा गुणाकार शेवटच्या तीन अंकी संख्येतून वजा केला असता शेष एक अंकी राहतो. तसेच तीन अंकी संख्येच्या एकम्स्थानी २ हा अंक आहे. म्हणून हा गुणाकार ९३ किंवा ९३ हून मोठा असला पाहिजे. तसाच तो ९९ किंवा ९९ हून छोटाही असला पाहिजे. याचाच अर्थ भाजक ३१, ३२ किंवा ३३ असू शकतो. भाजक आणि भागाकाराच्या शतम्स्थानच्या अंकाचा गुणाकारही दोन अंकी आहे आणि गुणाकाराच्या एकम्स्थानी ४ आहे. यावरून भाजक ३२ आहे आणि भागाकाराच्या शतम्स्थानी २ हा अंक आहे हे स्पष्ट होते.

भागाकाराच्या दहम्स्थानी असा कोणता अंक असला पाहिजे की त्या अंकाने ३२ या भाजकाला गुणले असता येणाऱ्या गुणाकाराच्या दहम्स्थानी ५ असतील हे पाहू. हा अंक ८ असला पाहिजे. कारण ३२ × ८ = २५६.

एवढ्यावरून भागाकाराचे हे गणित पुढीलप्रमाणे दिसेल.

```
        २ ८ ३
     ---------
३२ ) - - - २
     ६ ४
     -------
     - - -
     २ ५ ६
     -------
       - - २
         ९ ६
     ---------
           -
```

यावरून शेष ६ राहत असावा आणि ९६ च्या वरची राशी १०२ असावी. यावरून २५६ च्या वरच्या राशीतील एकम्स्थानी ६, दहम्स्थानी ६ आणि शतम्स्थानी २ असावेत हे स्पष्ट होते.

साहजिकच भाज्याच्या दहम्स्थानी ६ असावेत, शतम्स्थानी ० आणि सहस्रस्थानी ९ असावेत.

अशा रीतीने गायब झालेले अंक शोधून काढून ते व्यवस्थित लिहिल्यावर हे गणित पुढीलप्रमाणे अर्थपूर्ण होते.

```
          २ ८ ३
       ---------
३२ ) ९ ० ६ २
       ६ ४
       ---------
       २ ६ ६
       २ ५ ६
       ---------
          १ ० २
            ९ ६
       ---------
              ६
```



२२. गणवेषधारी माणसाचा वेग

दीड मैल लांबीची मिरवणूक मला पाऊण तासात ओलांडून गेली. म्हणून मिरवणुकीचा ताशी वेग २ मैल होता. गणवेषधारी माणसाचा चालण्याचा वेग ताशी 'क्ष' मैल होता असे आपण मानू.

तो गणवेषधारी माणूस मिरवणुकीच्या मागील टोकाला जात असता मिरवणूक आणि तो माणूस परस्परांच्या विरुद्ध दिशेला जात होते. साहजिकच त्यांच्यामधील दीड मैलाचे अंतर त्या दोघांच्या वेगाच्या बेरजेने म्हणजेच ताशी (क्ष + २) मैल या वेगाने तुटले. याउलट त्या माणसाच्या परतीच्या वेळेला मिरवणूक आणि तो माणूस एकाच दिशेने चालले होते आणि त्यांच्यामधील अंतर त्यांच्या वजाबाकीने म्हणजेच ताशी (क्ष – २) मैल या वेगाने तुटत होते.

परतीच्या वेळी तो माझ्यापर्यंत येऊन पोहोचला तेव्हा निम्मी मिरवणूक मला ओलांडून गेलेली असल्याने त्यावेळी त्याने दीड मैलाच्या निम्मे म्हणजे पाऊण मैल अंतर पार केले होते. तसेच एवढे अंतर पार करण्यास

त्याला एकूण $\frac{३}{४} \times \frac{१}{२} = \frac{३}{८}$ तास वेळ लागला होता.

$$\therefore \frac{३}{२} \times \frac{१}{(क्ष + २)} + \frac{३}{४} \times \frac{१}{(क्ष - २)} = \frac{३}{८}$$

दोन्ही बाजूंना $\frac{८}{३}$ ने गुणले असता

$$\frac{४}{(क्ष + २)} + \frac{२}{(क्ष - २)} = \frac{१}{१}$$

$$\therefore ४क्ष - ८ + २क्ष + ४ = क्ष^{२} - ४$$

$$\therefore ६क्ष - ४ = क्ष^{२} - ४$$

$\therefore क्ष^2 = ६क्ष$

$\therefore क्ष = ६$

म्हणून गणवेषधारी माणसाचा चालण्याचा वेग ताशी ६ मैल होता.



२३. किती सोपी बेरीज!

दोन चार अंकी राशींची बेरीजही चार अंकीच आहे. म्हणून राशीतील सहस्रस्थानचा अंक ५ किंवा त्याहून मोठा असू शकत नाही. कारण तसे झाल्यास बेरीज पाच अंकी होईल. याचा अर्थ सहस्रस्थानी ४ किंवा त्याहून छोटा अंक आहे. हा अंक राशींच्या सुरुवातीला असल्याने तो शून्य असू शकत नाही. तेथील १ हा अंक चुकीचा आहे, हेही आपणास ठाऊक आहे. म्हणून त्या जागी २, ३ किंवा ४ यापैकी एक अंक आहे. तो ४ आहे असे मानल्यास उत्तरातील सहस्रस्थानचा ८ हा अंक बिनचूक ठरतो. पण तसे होणे नाही. म्हणून सहस्रस्थानचा अंक ४ नाही. तो २ आहे असे मानावे तर बेरजेच्या दोन्ही राशींतील एकम्स्थानचे ७ हे अंक बिनचूक ठरतात. पण हेही चुकीचे आहे. म्हणून राशींच्या सहस्रस्थानी २ हा अंक नाही. म्हणजेच तो ३ आहे. साहजिकच उत्तरातील सहस्रस्थानचा ८ हा चुकींचा अंक ६ या बिनचूक अंकाचे प्रतिनिधित्व करतो. उत्तराच्या एकम्स्थानीही ८ च्या जागी ६ हा बिनचूक अंक येण्यासाठी राशींतील एकम्स्थानच्या ७ या चुकीच्या अंकाच्या जागी ८ हा बिनचूक अंक आला पाहिजे.

बेरीज करताना शतम्स्थानाकडून सहस्रस्थानाकडे हातचा १ जाता कामा नये. कारण तेथे हातचा १ गेल्यास उत्तरातील सहस्रस्थानचा अंक विषम होईल. हाच अंक एकम्स्थानीही केवळ दोन समान अंकांच्या बेरजेच्या रूपाने मिळत असल्याने तो अंक विषम असूच शकत नाही. याचा अर्थ शतम्स्थानच्या दोन अंकांची बेरीज ९ किंवा त्याहून लहान असली पाहिजे.

परंतु उत्तरातील शतमस्थानी ९ हा चुकीचा अंक असल्याने ती बेरीज ९ असू शकत नाही. राशींच्या एकमस्थानचा चुकीचा ७ हा अंक, बिनचूक अंक ८चे प्रतिनिधित्व करीत असल्याने ९ हा चुकीचा अंक बिनचूक ८ या अंकासाठी येऊ शकत नाही. म्हणजेच ही बेरीज आठही नाही. म्हणजेच ती ७ असली पाहिजे. याचा अर्थ चुकीच्या शून्य या अंकाच्या जागी १ हा बिनचूक अंक येणार. तसेच ही बेरीज सातच राहावी म्हणून दहमस्थानाकडून हातचा १ येणार नाही. म्हणजेच राशीतील दहमस्थानचा ६ हा चुकीचा अंक ४ किंवा त्याहून लहान बिनचूक अंकाचे प्रतिनिधित्व करतो. तो शून्याचे प्रतिनिधित्व करू शकत नाही; कारण तसे झाल्यास उत्तरातील दहमस्थानी १ येईल आणि ५ हा चुकीचा अंक १ या बिनचूक अंकाचे प्रतिनिधित्व करत आहे असे सिद्ध होईल. हे शक्य नाही कारण शून्य हा चुकीचा अंक १ या बिनचूक अंकाचे प्रतिनिधित्व करतो. तो दोन या अंकाचेही प्रतिनिधित्व करू शकत नाही, कारण तसे केल्यास उत्तराच्या दहमस्थानचा ५ हा चुकीचा अंक बिनचूक ठरतो. १ हा चुकीचा अंक ३ या बिनचूक अंकासाठी याअगोदरच आल्याने तो तीनदेखील असू शकत नाही. म्हणजेच ६ हा चुकीचा अंक ४ या बिनचूक अंकासाठी आला आहे. साहजिकच ५ हा चुकीचा अंक ९ या बिनचूक अंकासाठी आला आहे.

म्हणून बिनचूक अंकांची बिनचूक बेरीज पुढीलप्रमाणे आहे.

```
  ३ ६ ४ ८
+ ३ १ ४ ८
---------
  ६ ७ ९ ६
```



२४. गवताच्या गठ्ठ्यांचे वजन

गवताच्या सर्वात हलक्या गठ्ठ्यास 'अ' आणि सर्वात जड गठ्ठ्यास 'इ' म्हणू आणि 'अ' गठ्ठ्यापासून 'इ' गठ्ठ्यापर्यंत वाढत्या वजनानुसार गठ्ठ्यांना अनुक्रमे 'ब', 'क' आणि 'ड' म्हणू.

या गठ्ठ्यांच्या पुढीलप्रमाणे १० जोड्या होतील.

अब, अक, अड, अइ;

बक, बड, बइ;

कड, कइ.;

डइ.

वर दिलेल्या जोड्या पाहिल्यास लक्षात येते की सर्व जोड्या एकत्र केल्यास प्रत्येक गवताचा गठ्ठा चार वेळा आलेला दिसेल. कोड्यातही १० जोड्यांचे वजन दिले आहे. साहजिकच या दहाही जोड्यांची बेरीज करून त्याला चाराने भागल्यास पाची गठ्ठ्यांचे एकूण वजन मिळेल.

∴ ११० + ११२ + ११३ + ११४ + ११५
+ ११६ + ११७ + ११८ + १२० + १२१
= ११५६ ÷ ४ = २८९ कि. ग्रॅ.

'अ' आणि 'ब' या हलक्या गठ्ठ्यांचे वजन ११० कि. ग्रॅ. आहे व 'ड' आणि इ' या जड गठ्ठ्यांचे वजन १२१ कि. ग्रॅ. आहे.

∴ 'अ', 'ब', 'ड', आणि 'इ' या चार गठ्ठ्यांचे वजन २३१ कि. ग्रॅ. आहे.

∴ 'क' गठ्ठ्याचे वजन २८९ – २३१ = ५८ कि. ग्रॅ. आहे.

'अ' गठ्ठ्याचे वजन ११२ – ५८ = ५४ कि. ग्रॅ. आहे.

'ब' गठ्ठ्याचे वजन ११० – ५४ = ५६ कि. ग्रॅ. आहे.

'इ' गठ्ठ्याचे वजन १२० – ५८ = ६२ कि. ग्रॅ. आहे.

आणि 'ड' गठ्ठ्याचे वजन १२१ – ६२ = ५९ कि. ग्रॅ. आहे.

म्हणून पाच गठ्ठयांचे वाढत्या क्रमाने वजन पुढीलप्रमाणे ५४, ५६, ५८, ५९ आणि ६२ कि.ग्रॅ. आहे.



२५. समीकरण सोडवताना कुठे चूक झाली?

गुरुजींनी दोन्ही बाजूंना (ब + क – अ) ने जेव्हा भागले तेव्हाच त्यांनी चूक केली.

कारण अ = ब + क असल्याने

(ब + क – अ) = ०

आणि शून्याने समीकरणाला कधीच भागता येत नाही.

उदा. असे पाहा ५० × ० = ० तसेच १०० × ० = ०

साहजिकच ५० × ० = १०० × ०

परंतु म्हणून दोन्ही बाजूंना शून्याने भागून आपल्याला ५० = १०० असे म्हणता येत नाही.



२६. अजब योगायोग

आपण लताचे वय 'क्ष' वर्षे मानू. म्हणजे दत्ताचे वय '२ क्ष' वर्षे होईल. ललिताचे वय 'य' वर्षे मानू. परंतु ह्या दोन्ही मुलींच्या वयाची बेरीज दत्ताच्या वयाच्या दुप्पट आहे.

म्हणून क्ष + य = ४ क्ष

∴ य = ३ क्ष

याचा अर्थ ललिताचे वय ३ क्ष वर्षे आहे.

आता अवधूतचे वय 'झ' वर्षे आहे असे मानू. परंतु दत्ताच्या आणि अवधूतच्या वयाची बेरीज लताच्या आणि ललिताच्या वयाच्या बेरजेच्या दुप्पट आहे.

$$\text{म्हणून } २ क्ष + झ = २(क्ष + ३ क्ष) = ८ क्ष$$
$$\therefore झ = ६ क्ष$$

याचा अर्थ अवधूतचे वय '६ क्ष' वर्षे आहे.

वसुधाचे वय २१ वर्षे आहे हे आपण जाणतोच. शिवाय लता, ललिता आणि वसुधा यांच्या वयाची बेरीज दत्ता आणि अवधूतच्या वयाच्या बेरजेच्या दुप्पट आहे.

$$\text{म्हणून } क्ष + ३ क्ष + २१ = २(२ क्ष + ६ क्ष)$$
$$\therefore ४ क्ष + २१ = १६ क्ष$$
$$\therefore १२ क्ष = २१$$

याचाच अर्थ $क्ष = \frac{२१}{१२} = \frac{७}{४}$

यावरून लताचे वय १ वर्ष ९ महिने

दत्ताचे वय (२ क्ष) ३ वर्षे ६ महिने

३ क्ष वयाच्या ललिताचे वय ५ वर्षे ३ महिने

आणि ६ क्ष वयाच्या अवधूतचे वय १० वर्षे ६ महिने आहे

वसुधाचे वय २१ आहे हे कोड्यात दिलेलेच आहे.



२७. विचित्र गणित

१) र = २ असल्याने प्रत्यक्ष गणितात 'र' च्या जागी २ हा अंक लिहू.

$\therefore$ २ क्ष अ म य

$$\begin{array}{r} \times ४ \\ \hline य\ म\ अ\ क्ष\ २ \end{array}$$

२) गुणाकाराच्या उत्तरात एकमस्थानी २ असल्याने य = ३ किंवा ८ असेल. कारण ३ × ४ = १२ व ८ × ४ = ३२.

३) तसेच दशसहस्रस्थानच्या २ ला ४ने गुणल्यास गुणाकार ८ व हातचा १ असला तर ९ यायला पाहिजे. हातचे २ असणे शक्य नाही. कारण तसे झाल्यास उत्तर सहा अंकी येईल. प्रत्यक्षात ते पाच अंकी आहे.

२) आणि ३) ची सांगड घातल्यास य = ८ असला पाहिजे. याचाच अर्थ क्ष ला ४ने गुणले असता गुणाकार १० हून अधिक असता कामा नये.

∴ क्ष = १ किंवा २ असेल कारण १ × ४ = ४ व २ × ४ = ८

पण र = २ हे अगोदरच दिले आहे.

∴ क्ष = १ असला पाहिजे.

या साऱ्या किंमती गणितात लिहिल्यास

४) २ १ अ म ८

$$\begin{array}{r} \times ४ \\ \hline ८\ म\ अ\ १\ २ \end{array}$$

५) वरील गणितात ८ ला ४ने गुणल्यावर उत्तरात एकमस्थानी २ येऊन हातचे ३ येतात. उत्तरात दहमस्थानी १ येण्यासाठी म × ४ = ★८ यायला पाहिजेत.

∴ म = २ किंवा ७ कारण २ × ४ = ८ व ७ × ४ = २८

पण र = २ हे आपणास ठाऊकच आहे.

∴ म = ७

६) आता गणित झाले २ १ अ ७ ८

$$\begin{array}{r} \times ४ \\ \hline ८\ ७\ अ\ १\ २ \end{array}$$

७) आता ७ ला ४ ने गुणून त्यात (४ × ८) चे हातचे ३ मिळविल्यास ३१ मिळतील व पुढच्या संख्येसाठी पुन्हा हातचे ३ येतील.

८) अ × ४ = जी संख्या मिळेल तीत ३ मिळविल्यास पुन्हा एकम्स्थानी 'अ' च मिळायला हवा. ∴ विषम अंक असला पाहिजे.
विषम अंकांपैकी १ = क्ष, ७ = म हे आपण पाहिले आहे.

∴ अ = ३, ५ किंवा ९ असू शकतो.

परंतु अ = ३ असल्यास ३ × ४ + ३ = १५
व अ = ५ असल्यास ५ × ४ + ३ = २३ होतात व ते शक्य नाही.
∴ अ = ९ असावा. तसे झाल्यास

९ × ४ + ३ = ३९
∴ अ = ९
∴ २ १ ९ ७ ८
× ४
८ ७ ९ १ २



२८. अनेक अंक अदृश्य झालेला भागाकार

भाज्याच्या शेवटी ७ हा अंक आहे आणि भागाकार नि:शेष आहे. म्हणजेच भाजकाच्या दोन अंकी संख्येच्या एकम्स्थानी ७ हाच अंक असला पाहिजे. त्याचप्रमाणे भागाकाराच्या एकम्स्थानी १ हाच अंक असला पाहिजे. तसे नसल्यास तिसऱ्या अंशत: भागाकाराच्या शेवटी ७ हा अंक येणार नाही आणि भागाकार नि:शेष होणार नाही. याउलट भागाकाराच्या एकम्स्थानी ७ आणि भाजकाच्या एकम्स्थानी १ हा अंक असल्यास गुणाकार तीन अंकी येईल.

भागाकारातील शतमस्थानच्या २ ने भाजकाला गुणले असता गुणाकार दोन अंकी येतो आणि तो भाज्याच्या पहिल्या तीन अंकी संख्येतून वजा केला असता दोन अंकी संख्या बाकी राहते. याचा अर्थ भाजक ४९ हून लहान आहे. भाजकाच्या शेवटी ७ हा अंक येत असल्याने तो १७, २७, ३७ किंवा ४७ असू शकतो. भागाकाराच्या दहम्स्थानी सर्वांत मोठा अंक म्हणजेच ९ आहे असे मानल्यास १७ × ९ = १५३, २७ × ९ = २४३ आणि ३७ × ९ = ३३३ असे दुसरे अंशत: भागाकार मिळतील आणि ते त्यावरच्या चारशेने सुरू होणाऱ्या तीन अंकी संख्येतून वजा केले असता मिळणारी संख्या १७, २७ किंवा ३७ हूनही फारच मोठी असेल. हे शक्य नाही म्हणून भाजक ४७ च असला पाहिजे. यावेळीही अंशत: भागाकार चारशेहून मोठा मिळण्यासाठी भागाकाराच्या दहम्स्थानी ९ हाच अंक असला पाहिजे. याचा अर्थ भागाकार २९१ आहे.

भाजक × भागाकार = भाज्य

∴ ४७ × २९१ = १३६७७

यावरून भागाकाराचे पूर्ण केलेले गणित पुढीलप्रमाणे असेल

```
४ ७)१ ३ ६ ७ ७(२ ९ १
      ९ ४
    -------
      ४ २ ७
      ४ २ ३
      -------
          ४ ७
          ४ ७
          ---
          - -
```



२९. विधवेच्या वाट्याची रक्कम

शेठजींच्या विधवेला मिळालेली रक्कम 'क्ष' होती असे आपण मानू. याचा अर्थ प्रत्येक मुलीला '२ क्ष' आणि प्रत्येक मुलाला '६ क्ष' रक्कम मिळाली असणार.

म्हणजेच शेठजींच्या विधवेला 'क्ष' रुपये.

त्यांच्या ४ मुलींना '८ क्ष' रुपये.

आणि त्यांच्या ५ मुलांना '३० क्ष' रुपये

मिळून एकूण '३९ क्ष' रुपये इतकी रक्कम झाली.

∴ ३९ क्ष = १, ९५, ४४२ रुपये ९ आणे ९ पै.

प्रथम १, ९५, ४४२ रुपयांना ३९ ने भागू. म्हणजे भागाकार ५०११ मिळतो आणि शेष १३ रुपये राहतात. या १३ रुपयांचे १६ × १३ = २०८ आणे होतात. त्यात तिजोरीतील ९ आणे मिळविले की २१७ आणे मिळतात. म्हणून २१७ आण्यांना ३९ ने भागू म्हणजे भागाकार ५ मिळतो आणि शेष २२ आणे उरतात. या २२ आण्यांच्या १२ × २२ = २६४ पया होतात. त्यात तिजोरीतील ९ पया मिळविल्या की पया होतात २७३. या २७३ पयांना ३९ ने भागू की भागाकार ७ मिळतो व शेष काही राहत नाही.

∴ क्ष = ५०११ रुपये ५ आणे ७ पै होतात.

यावरून शेठजींच्या विधवेला ५०११ रुपये ५ आणे आणि ७ पया मिळाल्या हे उघड आहे.



३०. विश्वकोशाचे खंड

आपण त्या संचातील खंडांची संख्या 'स' होती असे समजू.

म्हणून पहिल्या खंडाची पृष्ठसंख्या ($स^२$ + १) असेल.

दुसऱ्या खंडाची पृष्ठसंख्या $(स^2 + १) + २$ असेल.
तिसऱ्या खंडाची पृष्ठसंख्या $(स^2 + १) + २ + ३$ असेल.
चौथ्या खंडाची पृष्ठसंख्या $(स^2 + १) + २ + ३ + ४$ असेल.

अशा प्रकारे खंडक्रमांक आणि त्या खंडातील पृष्ठसंख्या कशी वाढत जाते हे आपण बारकाईने पाहिले की त्यासंबंधीचा एक नियम आपल्या लक्षात येतो. तो नियम म्हणजे कोणत्याही खंडातील पृष्ठांची संख्या म्हणजे संचातील खंडसंख्येचा वर्ग अधिक ज्या खंडातील पृष्ठांची संख्या जाणून घ्यायची आहे त्या खंडक्रमांकाच्या वर्गाची व खंडक्रमांकाची निमपट. याच नियमाचे पालन करून पुन्हा आपण पृष्ठसंख्या लिहू.

म्हणून पहिल्या खंडाची पृष्ठसंख्या $स^2 + \frac{१^2 + १}{२} = स^2 + १$

दुसऱ्या खंडाची पृष्ठसंख्या $स^2 + \frac{२^2 + २}{२} = स^2 + ३$

तिसऱ्या खंडाची पृष्ठसंख्या $स^2 + \frac{३^2 + ३}{२} = स^2 + ६$

चौथ्या खंडाची पृष्ठसंख्या $स^2 + \frac{४^2 + ४}{२} = स^2 + १०$

.... = ...
.... = ...

आणि 'स'व्या खंडाची पृष्ठसंख्या $स^2 + \frac{स^2 + स}{२}$ असेल.

ही संख्या ३४५ असल्याचे कोड्यात म्हटले आहे.

$$\therefore स^2 + \frac{स^2 + स}{२} = ३४५$$

$$\therefore २स^2 + स^2 + स = ६९०$$

$$\therefore ३स^2 + स - ६९० = ०$$

$$\therefore ३स^2 + ४६स - ४५स - ६९० = ०$$

$$\therefore स(३स + ४६) - १५(३स + ४६) = ०$$

$$\therefore (स - १५)(३स + ४६) = ०$$

$$\therefore स = १५ \text{ किंवा } -\frac{४६}{३}$$

परंतु खंडाची पृष्ठसंख्या ऋण किंवा अपूर्णांकात असूच शकत नाही. म्हणून स = १५.

म्हणून त्या संचात एकूण १५ खंड होते.



३१. चमत्कारिक संख्या

कागद फाटल्यामुळे ज्या दोन अंकी संख्या तयार होतात त्यापैकी पहिल्या दोन अंकी संख्येला 'अ' आणि दुसऱ्या दोन अंकी संख्येला 'ब' म्हणू. तसेच त्यांच्या बेरजेमुळे तयार होणाऱ्या तिसऱ्या दोन अंकी संख्येला 'क' म्हणू. 'अ' आणि 'ब' च्या बेरजेच्या वर्गामुळे होणाऱ्या म्हणजेच 'क' च्या वर्गामुळे पुन्हा मूळचीच संख्या मिळत असल्याने आपण $(अ + ब)^2 = क^2$ असे लिहू शकतो. म्हणजेच अ + ब = क किंवा ब = क − अ होय.

सुभाषिणीने सांगितल्याप्रमाणे ०१ ही संख्या आपण जशी दोन अंकी म्हणून मानू शकतो तशी ०००० ही संख्याही चार अंकी मानू शकतो.

उलटपक्षी 'अ' ही संख्या मूळ संख्येतील शतकांची संख्या दर्शविते आणि 'ब' ही संख्या एककांची पंख्या दर्शविते असेही आपण मानू शकतो, (येथे 'अ' ही संख्या हजाराची किंमत शेकड्याच्या पटीत आणि 'ब' ही संख्या दशकाची किंमत एककाच्या पटीत दर्शवीत आहे असे अभिप्रेत आहे.) साहजिकच $क^२$ (मूळची चार अंकी संख्या) बरोबर १०० अ + ब असे आपण म्हणू शकतो. परंतु ब = क – अ हे आपण वर अगोदरच पाहिलेले आहे. 'ब' ची ही किंमत आपण नव्याने मिळविलेल्या समीकरणात मांडली तर ते समीकरण असे दिसेल.

$$१०० अ + (क - अ) = क^२$$
$$\therefore ९९ अ = क^२ - क$$
$$\therefore ९९ अ = क(क - १)$$
$$\therefore अ = \frac{क(क - १)}{९९}$$

सुरुवातीला म्हटल्याप्रमाणे 'अ' हा पूर्णांक असलाच पाहिजे आणि क(क – १) ला ९९ ने नि:शेष भाग गेला तरच 'अ' पूर्णांक असू शकेल. ९९ ही संख्या आपण ९ × ११ अशीही लिहू शकतो. केवळ चार बाबतीत 'अ' पूर्णांक असू शकतो.

१. ज्यावेळी क = ९९ असेल तेव्हा. त्यावेळी अ = ९८ आणि ब = १. यावरून कोड्यात सांगितलेलीच ९८०१ ही संख्या मिळते.

२. ज्यावेळी (क – १) = ९९ असेल तेव्हा. अशा वेळी अ = १०० होतील आणि $अ^२$ = १०,००० अशी पाच अंकी संख्या मिळेल. आपणास केवळ चार अंकी संख्या पाहिजे. म्हणून ही बाब उपयोगाची नाही.

३. ज्यावेळी 'क' ला ९ ने भाग आणि (क – १) ला ११ ने भाग जात असेल तेव्हा. हे ठरविण्यासाठी नवाने भाग जाणाऱ्या एक आणि दोन अंकी संख्या एका बाजूला आणि त्याहून एकाने कमी असणाऱ्या संख्या शेजारीच

पण दुसऱ्या बाजूला लिहू. बाजूच्या तक्त्यावरून असे दिसून येते की आपल्याला हव्या असलेल्या सर्व गोष्टींची पूर्तता करणारी ४५ व ४४ ही एकच एक जोडी आहे.

क	(क - १)
९	८
१८	१७
२७	२६
३६	३५
४५ (वर्तुळाकित)	४४ (वर्तुळाकित)
५४	५३
६३	६२
७२	७१
८१	८०
९०	८९
९९	९८

$$\therefore \quad अ = \frac{\overset{५}{\cancel{४५}} \times \overset{४}{\cancel{४४}}}{\underset{१}{\cancel{९}} \times \underset{१}{\cancel{११}}} = २०$$

आणि ब = ४५ − २० = २५

म्हणून सुभाषिणीने शोधून काढण्यास सांगितलेल्या संख्यांपैकी २०२५ ही एक संख्या आहे.

४. ज्यावेळी 'क' ला ११ ने आणि (क – १) ला ९ ने भाग जात असेल तेव्हा. हे ठरविण्यासाठी ११ ने भाग जाणाऱ्या संख्या 'क' म्हणून आणि त्याहून एकाने कमी असणाऱ्या संख्या (क – १) म्हणून बाजूबाजूला लिहू आणि त्यापैकी कोणत्या (क – १) ला नवाने भाग जातो ते पाहू.

क	(क - १)
११	१०
२२	२१
३३	३२
४४	४३
(५५)	(५४)
६६	६५
७७	७६
८८	८७
९९	९८

∴ बाजूच्या तक्त्यावरून ५५ आणि ५४ ही एकच एक जोडी आपल्याला हव्या असलेल्या सर्व गोष्टींची पूर्तता करीत असल्याचे दिसून येते.

$$\therefore \quad अ = \frac{\overset{५}{\cancel{५५}} \times \overset{६}{\cancel{५४}}}{\underset{१}{\cancel{११}} \times \underset{१}{\cancel{९}}} = ३०$$

$$\therefore \quad ब = ५५ - ३० = २५$$

∴ अ + ब = ५५ आणि ५५चा वर्ग = ३०२५ आहे.

म्हणून २०२५ आणि ३०२५ ह्या त्या सुभाषिणीने विचारलेल्या चार अंकी दोन संख्या.



३२. कसले हे गणित?

१) गणितातील अंकांची पुनरावृत्ती टाळायची असल्याने एक अंकी संख्या जशी १ असू शकत नाही त्याचप्रमाणे दोन अंकी संख्येच्या एकम्स्थानी १ असूच शकत नाही. शिवाय गुणाकाराचे उत्तर तीन अंकी असल्याने दोन अंकी संख्येच्या दहम्स्थानीही १ असू शकत नाही.

२) एक अंकी संख्या २ असल्यास उत्तर तीन अंकी मिळण्यासाठी दोन अंकी संख्येच्या दहम्स्थानी ५ किंवा ६ असले पाहिजेत.

३) वर दिलेल्या दोन गोष्टी लक्षात घेतल्यास ५ने सुरुवात होणाऱ्या ५३, ५४ आणि ५६ या तीनच संख्या आपल्याला मिळतात. परंतु शून्याचा या गणितात वापर करायचा नसल्याने दोन अंकी संख्या ५३ किंवा ५४ असू शकत नाही. कारण ५३ × २ = १०६ आणि ५४ × २ = १०८. ५६ × २ मध्ये उत्तराच्या एकम्स्थानी २ ची पुनरावृत्ती होते. म्हणून गुणक २ असताना ५ने सुरू होणारी एकही संख्या गणित अर्थपूर्ण करू शकत नाही.

४) समजा, दोन अंकी संख्या ६ने सुरू होणारी आहे. म्हणजे अगोदरची पथ्ये पाळल्यास ती ६३, ६४ किंवा ६५ असू शकेल. ६३ × २ आणि ६४ × २ यात उत्तराच्या दहम्स्थानी २ची पुनरावृत्ती होते तर ६५ × २ यात उत्तराच्या एकम्स्थानी शून्य येते व शून्य या कोड्यात वर्ज्य आहे. याचा अर्थ एक अंकी संख्या २ नाही.

५) एक अंकी संख्या कदाचित ३ असू शकेल. असे झाल्यास दोन अंकी संख्येच्या एकम्स्थानी ६ किंवा ५ असू शकत नाहीत. कारण पहिल्या

बाबतीत उत्तराच्या एकमस्थानी ८ हा अंक येतो, जो या गणितात वर्ज्य आहे. दुसऱ्या बाबतीत उत्तराच्या एकम्स्थानी ५ ह्या अंकाची पुनरावृत्ती होते. म्हणून तेथे ४ हा एकमेव अंक आहे.

६) एक अंकी संख्या ३ असल्यास दोन अंकी संख्येच्या दहम्स्थानी २ असू शकत नाहीत. कारण तसे झाल्यास उत्तरही दोन अंकी येईल. प्रत्यक्षात ते तीन अंकी आहे.

७) म्हणून दोन अंकी संख्येच्या दहम्स्थानी ६ किंवा ५ हा अंक असेल. तो ६ असल्यास दोन अंकी संख्या ६४ होईल. तिला ३ ने गुणले असता गुणाकार १९२ येईल; येथील ९ हा अंक या कोड्यात वर्ज्य आहे. म्हणून दोन अंकी संख्या ६४ नाही.

८) मग ती ५४ असेल. ५४ × ३ = १६२ मिळतात. येथे १ ते ६ हे अंक वापरून गणित अर्थपूर्ण होते.

९) परंतु हे गणित ५३ × ४ असेही होऊ शकत नाही, कारण उत्तरात २ ची पुनरावृत्ती होते.

१०) म्हणून ५४ × ३ = १६२ ही गणिताची एकमेव मांडणी आहे.

म्हणून ते गणित

    ३
× ५४
―――
१६२ असे आहे.



३३. असवली बंदर ते बलनपूर कारखाना

असवली बंदर ते बलनपूर कारखाना हे अंतर अनुक्रमे सरासरी ताशी ३२ कि. मी. आणि ताशी २४ कि. मी. वेगाने तोडल्यास अंतर तोडण्यात २ तासांचा फरक पडतो.

सरासरी ताशी वेगातील फरक ३२ कि. मी. उणे २४ कि. मी. म्हणजे ८ कि. मी. आहे.

२४ कि. मी. वेगाने प्रवास केल्यास ८ कि. मी. अंतराचा फरक भरून काढण्यासाठी

१ २०

$$\frac{\cancel{८}}{\cancel{२४}} \times \frac{\cancel{६०}}{१} = २०$$ मिनिटे जास्त लागतील.

$\cancel{३}$

१

ताशी २४ कि. मी. वेगाने जाताना २० मिनिटे जास्त लागण्यासाठी ताशी ३२ कि. मी. वेगाने १ तास जावे लागते. म्हणून ताशी २४ कि. मी. वेगाने जाताना १२० मिनिटे जास्त लागण्यासाठी ताशी ३२ कि. मी. वेगाने

६

$$\frac{\cancel{१२०}}{\cancel{२०}} \times \frac{१}{१} = ६$$ तास जावे लागेल.

१

याचाच अर्थ सरासरी ताशी ३२ कि. मी. वेगाने ६ तास प्रवास करावा लागेल. या वेळात टेम्पो ३२ × ६ = १९२ कि. मी. प्रवास करील.

हेच अंतर सरासरी ताशी २४ कि. मी. वेगाने तोडल्यास १९२ ÷ २४ = ८ तास लागतील.

म्हणून असवली बंदर ते बल्नपूर कारखाना हे अंतर १९२ कि. मी. चे आहे.



३४. तिघींचे वय

जनीचे सध्याचे वय 'क्ष' वर्षे आहे असे आपण मानू. साहजिकच, बनीचे वय (क्ष + १) वर्षे आहे आणि अनीचे वय ३ क्ष वर्षे आहे.

आणखी दोन वर्षांनी अनीचे वय (३ क्ष + २) वर्षे होणार आणि बनीचे वय (क्ष + ३) वर्षे होणार. पण दोन वर्षांनी अनीचे वय बनीच्या वयाच्या दुप्पट असेल.

$$\therefore ३ क्ष + २ = २(क्ष + ३)$$
$$\therefore ३ क्ष + २ = २ क्ष + ६$$
$$\therefore क्ष = ४$$

म्हणून जनी ४ वर्षांची, बनी ५ वर्षांची आणि अनी १२ वर्षांची आहे. **पडताळा** : बनीचे सध्याचे वय ५ वर्षे आहे. म्हणून दोन वर्षांनी ती ७ वर्षांची असेल. अनी १२ वर्षांची आहे. ती दोन वर्षांनी १४ वर्षांची होईल. १४ हे वय ७ च्या दुप्पट आहे. शिवाय १२ हे वय ४ च्या तिप्पट आहेच. म्हणजेच कोडे बरोबर सुटले आहे.



३५. पटकथन

अ = ९ आणि थ = ५ या किंमती मूळ अक्षरगणितात मांडू.

```
∴  ९ व न ध
 + प न ध प
 ─────────
  प ट क ५ न
```

दोन चार अंकी संख्यांची बेरीज पाच अंकी होते. साहजिकच प = १ असलाच पाहिजे. म्हणून सहस्रस्थानच्या स्तंभातील अंकांची बेरीज ९ + १ = १० होईल. जर शतम्स्थानाकडून हातचा १ आला तर ही बेरीज

९ + १ + १ = ११ होईल आणि प = ट = १ होईल. परंतु दोन अक्षरांची किंमत सारखी असू शकत नाही. म्हणून शतम्स्थानाकडून हातचा १ येत नाही आणि 'ट'ची किंमत शून्य ठरते. आता 'प' आणि 'ट' च्या किंमती अक्षरगणितात मांडू.

$$\begin{array}{r} \therefore\ ९\,व\,न\,ध \\ +\ १\,न\,ध\,१ \\ \hline १०\,क\,५\,न \end{array}$$

एकम्स्थानच्या अंकावरून न = ध + १. ही किंमत दहम्स्थानच्या 'न'साठी लिहू. ∴ २ध + १ = ५ किंवा १५ (जर दहम्स्थानाकडून शतम्स्थानाकडे हातचा १ जात असेल तर)

∴ २ध = ४ किंवा १४ म्हणजेच ध = २ किंवा ७.

आपण ध = ७ आहे असे मानू. साहजिकच न = ८.

या किंमती अक्षरगणितात मांडू.

$$\begin{array}{r} ९\quad व\quad ८\,७ \\ +\ १\quad ८\quad ७\,१ \\ \hline +\ १०\ (९ + व)\ ५\ ८ \end{array}$$

ट = ० असल्याने व = ० नाही.

व = १ किंवा एकाहून जास्त असल्यास शतम्स्थानाकडून सहस्रस्थानाकडे हातचा १ येईल. पण असे होऊ शकत नाही हे आपण अगोदरच पाहिले आहे. याचाच अर्थ ध = ७ आणि न = ८ नाही. म्हणून ध = २ आहे. साहजिकच न = ३ आहे.

$$\begin{array}{r} \therefore\ ९\,व\,३\,२ \\ +\ १\,३\,२\,१ \\ \hline १०\,क\,५\,३ \end{array}$$

येथे व = ७ किंवा साताहून मोठा असल्यास सहस्रस्थानी हातचा १ येईल. म्हणून 'व' ची किंमत सात किंवा साताहून जास्त असू शकत नाही. व = ६ असू शकत नाही. कारण व = ६ असल्यास क = ९ होईल. पण अ = ९ आहेच. व = ०, १, २, ३ किंवा ५ असूच शकत नाही. कारण या किंमती इतर अक्षरांच्या असल्याचे आपण अगोदरच पाहिले आहे.

याचा अर्थ व = ४. साहजिकच क = ७.

$$
\begin{array}{r}
\therefore \quad ९४३२ \\
+ \quad १३२१ \\
\hline
१०७५३
\end{array}
$$



३६. चिकूंची चमत्कारिक वाटणी

सकाळी येश्याने, धन्याने आणि तान्याने वाटणी केली तेव्हा प्रत्येकाच्या वाटणीला ७ चिकू आले होते. शिवाय उरलेला एक चिकू त्यांनी वाटसरूला दिला होता. याचा अर्थ सकाळी वाटणी करण्यापूर्वी तेथे (७ × ३ + १) = २२ चिकू होते.

परंतु खरे तर आदल्या रात्री तान्याने एकत्र करून ठेवलेल्या त्या दोन वाटण्या होत्या. त्यात तान्याच्या वाटणीचे ११ आणि त्याने खाल्लेला १ चिकू मिळविला की चिकू होतात ३४.

हे ३४ चिकू म्हणजे धन्याने एकत्र करून ठेवलेल्या दोन वाटण्या होत्या. त्यात धन्याची सतरा चिकूंची वाटणी आणि त्याने खाल्लेला एक चिकू मिळविला की चिकू होतात ५२.

परंतु हे ५२ चिकू म्हणजे येश्याने दोघांच्या वाटण्या म्हणून बाजूला काढून ठेवलेले होते. त्यात येश्याची २६ चिकूंची वाटणी आणि त्याने रात्री खाल्लेला १ चिकू मिळविला की चिकूंची संख्या होते ७९.

म्हणून त्या तिघांनी बागेतून ७९ चिकू चोरून आणले होते.



३७. अमृताकौरचे वय

अमृताकौरचे आजचे वय 'क्ष' वर्षे आहे असे आपण मानू.

जसवंतसिंग अमृताकौरच्या आजच्या वयाहून ४ वर्षांनी मोठा असताना म्हणजे तो (क्ष + ४) वर्षांचा असताना अमृताकौर त्याच्या आजच्या वयाच्या एकतृतीयांश वर्षांची म्हणजे

$$\frac{५४}{१} \times \frac{१}{३} = १८ \text{ वर्षांची होती.}$$

दोघांच्या तेव्हाच्या आणि आताच्या वयातील अंतर सारखेच असले पाहिजे.

$$\therefore ५४ - (\text{क्ष} + ४) = \text{क्ष} - १८$$

$$\therefore ५० - \text{क्ष} = \text{क्ष} - १८$$

$$\therefore २\,\text{क्ष} = ६८$$

$$\therefore \text{क्ष} = ३४$$

म्हणून अमृताकौरचे आजचे वय ३४ वर्षे आहे.

पडताळा : जसवंतसिंग आणि अमृताकौरच्या आजच्या वयात ५४ – ३४ = २० वर्षांचे अंतर आहे. जसवंतसिंग (३४ + ४) = ३८ वर्षांचा असताना अमृताकौर (३८ – २०) = १८ वर्षांची असणार.

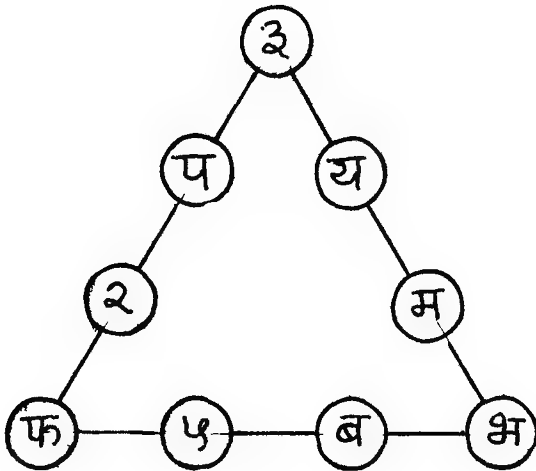
∴ अमृताकौरचे हे वय जसवंतसिंगच्या आजच्या वयाच्या $\frac{1}{3}$ आहे.

म्हणून अमृताकौरचे आजचे वय ३४ वर्षे आहे हे उत्तर बरोबर.



३८. गोळ्यांत अंक भरायचे

सोबतच्या चित्रात दाखविल्याप्रमाणे आपण रिकाम्या गोळ्यांना प, फ, ब, भ, म आणि य अशी नावे देऊ. नंतर डाव्या बाजूवरील गोळ्यांची बेरीज करू.



३ + प + २ + फ = २१

∴ प + फ = २१ − ५ = १६.

१ ते ९ पर्यंतच्या अंकांपैकी २, ३ आणि ५ हे अंक कोड्यात अगोदरच आले आहेत. १, ४, ६, ७, ८ आणि ९ हे सहाच अंक आता वापरासाठी उरले आहेत.

यापैकी ७ आणि ९ हे दोनच अंक १६ बेरीज देतात. म्हणून ते 'प' आणि 'फ' ची जागा घेऊ शकतात. समजा, 'प' च्या जागी ७ आणि 'फ' च्या जागी ९ हा अंक आपण लिहिला.

तळाच्या बाजूवरील गोळ्यांची बेरीज केल्यास ती
९ + ५ + ब + भ = २१ येते.

∴ ब + भ = २१ – १४ = ७ आहेत.

वापरासाठी उरलेल्या सहा अंकांपैकी केवळ १ आणि ६ हे दोनच अंक आपण 'ब' आणि 'भ' साठी निवडू शकतो.

समजा 'भ'च्या जागी आपण ६ हा अंक लिहिला. उजव्या बाजूवरील गोळ्यांची बेरीज केल्यास ती

३ + य + म + ६ = २१ येते

म्हणून य + म = २१ – ९ = १२.

आणि अद्याप न वापरलेले ८ आणि ४ हे अंक १२ बेरीज देतात. म्हणून कोड्याचे एक उत्तर पुढील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहे.

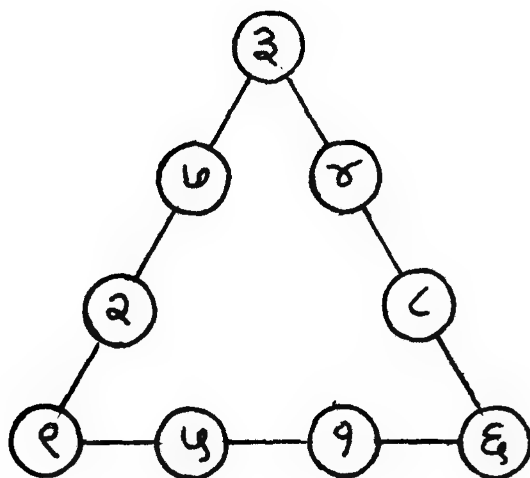
नंतर 'भ'च्या जागी १ आणि 'ब'च्या जागी ६ लिहू आणि पुन्हा उजव्या बाजूच्या गोळ्यांची बेरीज करू.

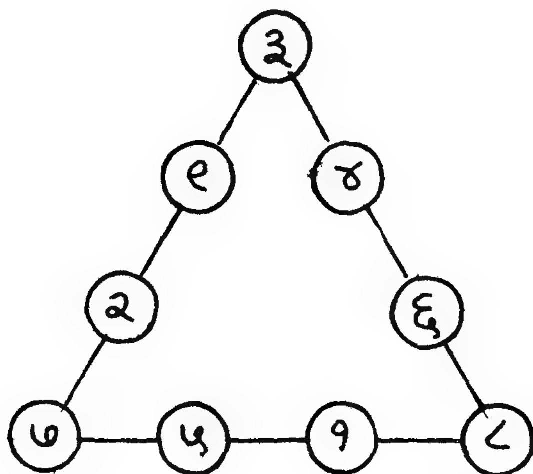
३ + य + म + १ = २१

∴ य + म = २१ – ४ = १७.

परंतु वापरासाठी उरलेल्या अंकांपैकी कोणतेही दोन अंक १७ ही बेरीज देत नाहीत. म्हणून 'भ'च्या जागी १ येऊ शकत नाही.

यानंतर 'प'च्या जागी ७ ऐवजी ९ आणि 'फ'च्या जागी ९ ऐवजी ७ लिहून तळाच्या बाजूवरील गोळ्यांची बेरीज करू.


३
७ ४
२ ८
९ ५ १ ६


३
९ ४
२ ६
७ ५ १ ८

७ + ५ + ब + भ = २१

म्हणून ब + भ = २१ − १२ = ९. वापरासाठी उरलेल्या अंकांपैकी १ आणि ८ हे दोन अंक ९ ही बेरीज देतात. समजा, 'भ'च्या जागी आपण ८ मांडले. आता उजव्या बाजूवरील गोळ्यांची बेरीज केल्यास आपणास मिळतात

३ + य + म + ८ = २१

∴ य + म = २१ − ११ = १०.

उरलेले ६ आणि ४ हे अंक १० बेरीज देतात. म्हणून कोड्याचे दुसरे उत्तर मागील आकृतीत दिल्याप्रमाणे आहे. 'भ'च्या जागी १ हा अंक येऊच शकत नाही हे आपण पूर्वीच पाहिले आहे. म्हणून या कोड्याची दोनच उत्तरे शक्य आहेत.



३९. खोल्यांचे क्रमांक

आपण सुधाच्या खोलीचा क्रमांक (१० क्ष + य) आहे असे मानू. साहजिकच राधाच्या खोलीचा क्रमांक (१० य + क्ष) असणार.

या दोन क्रमांकांतील अंतर ५४ आहे.

∴ (१० क्ष + य) − (१० य + क्ष) = ५४

∴ ९ क्ष − ९ य = ५४

∴ क्ष − य = ६

यावरून य = १ असल्यास क्ष = ७.

य = २ असल्यास क्ष = ८.

आणि य = ३ असल्यास क्ष = ९.

'य' ची किंमत चार किंवा चाराहून अधिक असूच शकत नाही. कारण तसे झाल्यास 'क्ष' ची किंमत एक अंकी राहू शकत नाही.

∴ मोठा क्रमांक (म्हणजे सुधाच्या खोलीचा) असणार ९३ किंवा ८२ किंवा ७१.

तर लहान क्रमांक (म्हणजे राधाच्या खोलीचा) असणार ३९ किंवा २८ किंवा १७.

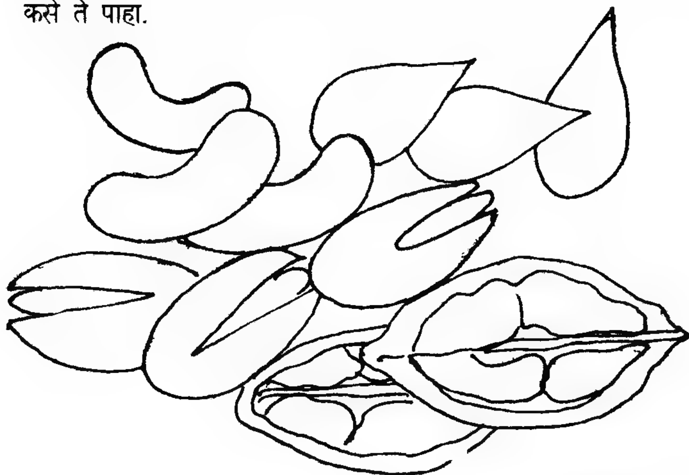
तथापि खोल्यांचे क्रमांक सम असल्याने सुधाच्या खोलीचा क्रमांक आहे ८२ आणि राधाच्या खोलीचा क्रमांक आहे २८.

वरील पद्धतीने तर्कसंगतरीत्या कोडे सोडवून माणिकला तिच्या मैत्रिणींच्या खोल्यांचे क्रमांक माहीत झाले असणार.



४०. सुक्यामेव्याची खरेदी

कोड्यात दिलेल्या गोष्टींवरून प्रत्येक जिन्नसाच्या १ किलोची किंमत काढणे शक्य नाही. तथापि पिशव्यांची जुळणी वेगवेगळ्या प्रकारे करून विचारलेल्या जिनसांची. विचारलेल्या वजनात आपण किंमत ठरवू शकतो. कसे ते पाहा.



किती पिशव्या घेतल्या	सारी वजने ग्रॅममध्ये				सिंगापुरी डॉलरमध्ये किंमत
	काजू	पिस्ता	बदाम	अक्रोड	
दीड	—	—	१५००	७५०	१२
निम्मी	—	१०००	—	२५०	६
एक	१५००	५००	—	५००	६
तीन	१५००	१५००	१५००	१५००	२४

वरील तक्त्यानुसार प्रत्येकी १५०० ग्रॅम काजू, पिस्ते, बदाम आणि अक्रोड असलेल्या सुक्यामेव्याची किंमत २४ सिंगापुरी डॉलर होते, तसेच पिशव्याही तीन होतात. याचाच अर्थ प्रत्येकी ५०० ग्रॅम काजू, पिस्ते, बदाम आणि अक्रोड असलेल्या पिशवीची किंमत २४ ÷ ३ = ८ सिंगापुरी डॉलर होईल.

म्हणून प्रत्येकी ५०० ग्रॅम काजू, पिस्ते, बदाम आणि अक्रोड असलेल्या पिशवीची खरेदी करायला कपिलला ८ सिंगापुरी डॉलर मोजावे लागतील.



४१. सरस अक्षरगणित

आपण 'स × र स = फ ण स' ला पहिली राशी, 'न र × न र = न व स' ला दुसरी राशी आणि 'फ ल + स ल = ब ल' ला तिसरी राशी म्हणू.

प्रथम आपण फ ल + स ल = ब ल ही तिसरी राशी पाहू. अंकगणिताप्रमाणे 'ल' मध्ये 'ल' मिळवून 'ल' च मिळवायचा असेल तर 'ल' ची किंमत शून्यच असली पाहिजे. 'ल' च्या जागी शून्याऐवजी दुसरा

अंक घेतल्यास बेरजेनंतर पुन्हा मूळचा अंक मिळणार नाही. म्हणून ल = ० हे सिद्ध होते. शिवाय फ ण स – न व स = ब ल यावरूनही 'ल'ची किंमत शून्य आहे हे सिद्ध होते.

यानंतर स × र स = फ ण स ही पहिली राशी पाहू. येथे 'र स' तील एकम्स्थानच्या 'स' ला पुन्हा 'स' ने गुणले असता फ ण स या तीन अंकी संख्येच्या एकम्स्थानी पुन्हा 'स' च येतो. असे होण्यासाठी 'स' ची किंमत ०, १, ५ किंवा ६ असली पाहिजे. र स × स = फ ण स अशी तीन अंकी संख्या मिळत असल्याने 'स' ची किंमत शून्य किंवा एक असू शकत नाही. म्हणजेच ती ५ किंवा ६ असू शकते. ती पाच आहे की सहा आहे ते ठरवू. यासाठी पहिला उभा स्तंभ पाहू. येथे स + न र = फ ल असे दिलेले आहे. 'ल' ची किंमत शून्य आहे हे आपण अगोदरच सिद्ध केले आहे. येथे र = ५ असेल तर ल = ० मिळण्यासाठी 'स' ची किंमतही ५ च असावी लागेल. परंतु अक्षरगणितात कोणत्याही दोन अक्षरांची किंमत सारखी नसते. म्हणून स = ५ नाही की र = ५ नाही. म्हणजेच 'स' ची किंमत ६ आहे आणि 'र' ची किंमत साहजिकच ४ आहे. एवढे झाल्यावर पहिल्या राशीत आपण 'स' आणि 'र' च्या किंमती लिहून अंकी गुणाकार करू. तो मिळतो ६ × ४६ = २७६. यावरून 'फ ण स' मधील 'फ' ची किंमत २ आणि 'ण' ची किंमत ७ आहे हे स्पष्ट होते.

दुसऱ्या उभ्या स्तंभात म्हणजे र स + न र = स ल या राशीत 'र', 'स' आणि 'ल' च्या किंमती लिहू.

म्हणजे ४६ + न४ = ६० मिळतात

∴ न४ = १४

∴ न = १ हे सिद्ध झाले.

'न', 'र' आणि 'स' च्या किंमती दुसऱ्या राशीत लिहू.

∴ १४ × १४ = १९६ मिळतात.

याचा अर्थ 'व' ची किंमत ९ आहे.

∴ फ ण स – न व स = २७६ – १९६ = ८०

∴ 'ब' ची किंमत ८ हे सिद्ध झाले.

यावरून अक्षरगणिताचे अंकगणितात रूपांतर पुढीलप्रमाणे आहे.

```
    ६ ×   ४ ६ =   २ ७ ६
 +       +       –
  १ ४ ×   १ ४ =   १ ९ ६
 -----------------------
  २ ० +   ६ ० =     ८ ०
```

❉ ✱ ❉

४२. फळांचा रस

ज्याअर्थी एका खानावळवाल्याने दुसऱ्या खानावळवाल्याच्या दुप्पट आंबरस घेतला त्याअर्थी दोन्ही खानावळवाल्यांनी खरेदी केलेल्या आंबरसाच्या राशीला तिनाने निःशेष भाग गेला पाहिजे.

प्रत्येक पिंपाच्या राशीतील अंकांची बेरीज करून सुरुवात केल्यास ती अनुक्रमे ६, ४, १, २, ७ आणि ९ येते आणि सर्व अंकांच्या बेरजेची बेरीज २९ येते. २९ ला तिनाने भागले असता पुन्हा २ शेष राहतात. म्हणून ज्या पिंपाच्या राशीतील अंकांची बेरीज २, ५ किंवा ८ येते ती पिंपे बाजूला ठेवली पाहिजेत.

प्रस्तुतच्या कोड्यात २० लिटर रस असलेले एकच एक पिंप असे आहे की ज्यातील अंकांची बेरीज २ येते.

म्हणून उत्तमचंदने या पिंपातील २० लिटर अननसाचा ताजा रस घेतला होता आणि तो त्याने स्वतःच्या 'कोल्ड्रिंक हाऊस'मध्ये विकायला ठेवला होता.

उरलेल्या पिंपांतील रसाची राशी १५ + ३१ + १९ + १६ + १८ = ९९ लिटर होते. म्हणजेच उत्तमचंदने एका खानावळवाल्याला ३३ लिटर आंबरस (१५ लिटरचे व १८ लिटरचे पिंप) आणि दुसऱ्या खानावळवाल्याला ६६ लिटर आंबरस (१६ लिटरचे, १९ लिटरचे आणि ३१ लिटरचे पिंप) विकला.



४३. 'मग डोळे सारखे' करणारी बेरीज

दोन सहा अंकी राशींची बेरीज सहा अंकीच येते याचा अर्थ 'स' ची किंमत चाराहून जास्त नाही. स + स = म किंवा ल + ल = म होत असल्याने 'म' हा अंक सम आहे. तसेच 'म' ची किंमत शून्य असणे शक्य नाही कारण तो उत्तराच्या सुरुवातीला येतो. म्हणजेच 'म' ची किंमत २, ४, ६ किंवा ८ आहे. परंतु म = ८ असू शकत नाही कारण तसे झाल्यास दहम्स्थानच्या स्तंभातील बेरीज ८ + ८ होऊन 'स' च्या जागी ६ येतील आणि एकम्स्थानाकडून हातचा १ आल्यास स = ७ होतील. हे शक्य नाही. म = ४ ही नाही. कारण तसे झाल्यास म + म = ४ + ४ होऊन 'स' च्या जागी ८ होतील. हेही शक्य नाही. म = २ झाल्यास म + म = २ + २ = ४ होतील. परंतु स + स = ४ + ४ होऊन उत्तराच्या पहिल्याच 'म' ची किंमत ८ होईल. हेही शक्य नाही. म्हणून म = ६ असावेत. साहजिकच स = ३ असावेत कारण स + स = म होण्यासाठी ३ + ३ = ६ असेच अंक येणार. त्यामुळे ल + ल = म मिळण्यासाठी ल = ८ असले पाहिजेत. त्यामुळे ८ + ८ = १६ होऊन एकम्स्थानाकडून दहम्स्थानाकडे हातचा १ जाईल आणि तेथील म + म + १ (हातचा) = ६ + ६ + १ होऊन उत्तराच्या दहम्स्थानी पुन्हा ३ म्हणजे स येईल.

पहिल्या राशीच्या दशसहस्रस्थानी ल म्हणजे ८ आहेत. ८ मध्ये दुसऱ्या राशीतील दशसहस्रस्थानचा 'द' मिळविल्यास लक्षस्थानी हातचा १ जाता कामा नये म्हणजेच ८ + द ही बेरीज ९ किंवा ८ असली पाहिजे. ती ८ + ० = ८ असू शकत नाही. कारण त्या स्तंभात ल + द = ल नसून 'ग' आहे. याचा अर्थ द = १ आणि ग = ९ असा होतो. परंतु सहस्रस्थानाकडून दशसहस्रस्थानाकडे हातचा १ जातो आणि पुन्हा 'ग' ची किंमत शून्य होते. याचा अर्थ द = १ नसून द = ० आहे आणि ग = ९ आहे. द = ० हे नक्की झाल्यावर सहस्रस्थानाकडून येणारा हातचा १ दशसहस्रस्थानाकडील 'ग' ची किंमत, सहस्रस्थानाच्या 'ग' प्रमाणेच ९ होते. या किंमती अक्षरगणितात मांडल्यावर आपल्याला ती बेरीज

```
  ३ ८ ९ क ६ ८
+ ३ ० क्ष क ६ ८
---------------
  ६ ९ अ क्ष ३ ६
```

अशी मिळेल.

यावरून गणितात अद्यापि १, २, ४, ५ आणि ७ हे अंक आलेले नाहीत हे स्पष्टपणे पाहता येते. शतम्‌स्थानची बेरीज क + क + १ (दहम्‌स्थानाकडून आलेला हातचा) = क्ष होत असल्याने 'क्ष' ची किंमत विषम आहे. म्हणून क्ष = १, ५ किंवा ७ असेल.

क = ५ किंवा २ किंवा ३ असल्यास क्ष बरोबर अनुक्रमे १, ५ किंवा ७ होऊ शकतो. तथापि स = ३ असल्याने क = ३ आणि म्हणून क्ष = ७ असूच शकत नाही. क = ५ असल्यास सहस्रस्थानाच्या स्तंभाची बेरीज ९ + १ + १ (हातचा) अशी होऊन 'अ' ची किंमतही १ होईल. हेही शक्य नाही. म्हणून क = २ आणि क्ष = ५ होणार. साहजिकच सहस्रस्थानच्या स्तंभाची बेरीज ९ + ५ अशी होऊन 'अ' ची किंमत ४ होणार.

साहजिकच दिलेल्या अक्षरगणिताचे अंकगणितात पुढीलप्रमाणे रूपांतर होईल.

$$
\begin{array}{r}
३८९२६८ \\
+\,३०५२६८ \\
\hline
६९४५३६
\end{array}
$$



४४. रिंगणात वर्तुळाकार फेऱ्या

पळणाऱ्या एका युवकाचा वेग दर सेकंदाला 'क्ष' मीटर आहे असे मानू, म्हणजे १० सेकंदांत तो युवक '१० क्ष' मीटर अंतर पार करील. हा युवक ज्यावेळी दुसऱ्या युवकाच्या दिशेने धावतो त्यावेळी त्यांची दर १० सेकंदांत गाठ पडत असल्याने दुसरा युवक तेवढ्याच वेळात (७० – १० क्ष) मीटर एवढे अंतर पार करीत असला पाहिजे. आपण दुसऱ्या युवकाचा पळण्याचा वेग दर सेकंदाला 'य' मीटर आहे असे गृहीत धरल्यास तो १० सेकंदांत '१० य' मीटर अंतर पार करील.

$\therefore$ ७० – १० क्ष = १० य

$\therefore$ क्ष + य = ७....(१)

जेव्हा दोघेही युवक एकाच दिशेने पळतात तेव्हा पहिला युवक ७० सेकंदांत '७० क्ष' मीटर अंतर पार करील तर दुसरा युवक ७० य मीटर अंतर पार करील. पहिला युवक दुसऱ्या युवकाच्या मानाने जलद पळतो असे मानल्यास त्या दोघांची जेव्हा गाठ पडते तेव्हा पहिल्याने ७० मीटरचा एक फेरा पूर्ण केलेला असतो.

$\therefore$ ७० क्ष – ७० य = ७०

$\therefore$ क्ष – य = १....(२)

समीकरण (१) आणि (२) यांची बेरीज केली असता

क्ष + य = ७

क्ष – य = १

∴ २ क्ष = ८

∴ क्ष = ४ आणि म्हणून य = ३.

∴ पहिल्या युवकाचा पळण्याचा वेग दर सेकंदाला ४ मीटर होता आणि दुसऱ्या युवकाचा वेग ३ मीटर होता.



४५. सत जल हव ग!

प्रथम या 'अक्षरगणिता'ची स्तंभांत विभागणी करू.

स्तंभ क्रमांक →	१	२	३	४	५	६	७
	म	न	न	ज	र	न	ग
+	न	व	न	ज	र	म	ज
	स	त	ज	ल	ह	व	ग

स्तंभ ७ पाहा.

ग + ज = ग. याचा अर्थ ज = ०.

स्तंभ ३ पाहा.

न + न = ज म्हणजेच न + न = ०

म्हणून न = ५ (आणि हातचा १ स्तंभ २ कडे जातो.) स्तंभ ४ पाहा.

ज + ज = ल. वास्तविक ज = ० असल्याने बेरीज ० + ० = ० म्हणजेच ज + ज = ज व्हायला हवी. ज्याअर्थी ती तशी नाही त्याअर्थी स्तंभ ५ कडून स्तंभ ४ कडे हातचा १ आला आहे.

∴ ल = १.

दोन सात अंकी राशींची बेरीज सात अंकीच आहे म्हणून स्तंभ १ मधील म + न = स या बेरजेतील 'स' ची किंमत ९ किंवा ९ हून कमी परंतु न = ५ असल्याने ती ६ किंवा ६ हून मोठी आहे. पुन्हा एकदा स्तंभ १ ची बेरीज पाहू. म + न = स आणि स्तंभ ६ ची बेरीज आहे. म + न = व. स्तंभ ७ कडून स्तंभ ६ कडे हातचा १ आलेला नाही. परंतु स्तंभ १ कडे स्तंभ २ कडून हातचा १ आलेला असावा. न = ५ हे आपण पाहिलेच आहे. म्हणून म = ३ किंवा तिनाहून लहान अंक असावा. ज = ० आणि ल = १ असल्याने म = ० किंवा १ असू शकत नाही. म्हणजेच म = २ किंवा ३ असणार.

आपण म = २ आहे असे मानू. म्हणून स्तंभ ६ ची बेरीज न + म = ५ + २ होऊन व = ७ होतील. त्यामुळे स्तंभ २ मधील न + व ही बेरीज स्तंभ ३ कडून आलेला हातचा १ धरून ५ + ७ + (१ हातचा) = १३ होईल आणि त = ३ होतील. तसेच स्तंभ २ कडून हातचा १ स्तंभ १ कडे जाऊन तेथील म + न + (१) ही बेरीज २ + ५ + (१) = ८ होईल. साहजिकच स = ८.

स्तंभ ५ कडून स्तंभ ४ कडे हातचा १ येतो हे आपण अगोदरच पाहिले आहे. म्हणून 'र' ची किंमत ५ किंवा त्याहून जास्त आहे. परंतु न = ५, व = ७ आणि स = ८ असल्याने र = ६ किंवा ९ असू शकते.

र = ६ मानल्यास ह = २ होतात; हे शक्य नाही कारण म = २ आहेत. र = ९ मानल्यास ह = ८ होतात, हेही शक्य नाही. कारण स = ८ आहेत. थोडक्यात म = २ असणे शक्य नाही. म्हणून म = ३ मानू. साहजिकच व = ८ होतील; त = ४ होतील आणि स = ९ होतील. यावरून र = ६ किंवा ७. र = ७ मानल्यास ह = ४ पण त = ४ आहेत. ∴ र ≠ ७.

र = ६ मानल्यास ह = २ हे बरोबर आहे.

∴ र = ६ हे सिद्ध झाले.

∴ उरलेले अक्षर ग = ७.

आता दिलेल्या अक्षरगणिताचे अंकगणितात पुढीलप्रमाणे रूपांतर होईल.

∴ ३ ५ ५ ० ६ ५ ७

\+ ५ ८ ५ ० ६ ३ ०

९ ४ ० १ २ ८ ७



४६. वाचनालयात आलेली पुस्तके

सोमवारी वाचनालयात श्री. साजबा कामतांकडे आलेल्या पुस्तकांची संख्या 'क्ष' होती आणि सोमवारी त्यांनी नोंदवहीत नोंद केलेल्या पुस्तकांची संख्या 'य' होती असे आपण मानू. प्रत्येक दिवशी वाचनालयात किती नवी पुस्तके आली आणि कितींची नोंद करण्यात आली हे पुढील तक्त्यात दिले आहे.

वार	वाचनालयात आलेली नवी पुस्तके	नोंदवहीत नोंद करण्यात आलेली पुस्तके
सोमवार	क्ष	य
मंगळवार	क्ष -य	१२
बुधवार	क्ष + १६	य
गुरुवार	३ य	२०
शुक्रवार	१०	क्ष
शनिवार	०	२४
एकूण	३क्ष + २य + २६	क्ष + २य + ५६

वरील तक्त्यात वाचनालयात आलेल्या एकूण नव्या पुस्तकांची जशी बेरीज दिली आहे तशीच नोंद केलेल्या एकूण पुस्तकांचीही बेरीज दिली आहे. श्री. कामतांनी आठवड्यात आलेल्या साऱ्या पुस्तकांची नोंद त्याच आठवड्यात केलेली असल्याने

$$३ क्ष + २ य + २६ = क्ष + २ य + ५६$$

$$\therefore २ क्ष = ३०$$

$$\therefore क्ष = १५$$

म्हणून बुधवारी १५ + १६ = ३१ नवी पुस्तके वाचनालयात आली होती.



४७. पत्त्यांचे गठ्ठे

कोड्यात दिलेल्या माहितीनुसार तिन्ही गठ्ठे सारख्याच आकाराचे होते असे म्हणता येत नाही. साहजिकच त्यातील पानांची संख्या कमी-जास्त असू शकते.

आपण पहिल्या गठ्ठ्यातील काळ्या पानांची संख्या 'अ', दुसऱ्या गठ्ठ्यातील काळ्या पानांची संख्या '३ ब' आणि तिसऱ्या गठ्ठ्यातील काळ्या पानांची संख्या 'क' होती असे मानू.

साहजिकच पहिल्या गठ्ठ्यातील लाल पानांची संख्या '३ अ', दुसऱ्या गठ्ठ्यातील लाल पानांची संख्या 'ब' आणि तिसऱ्या गठ्ठ्यातील लाल पानांची संख्या '२ क' होती.

५२ पानी पत्त्यांच्या जोडात २६ लाल आणि २६ काळी पाने असतात हे नव्याने सांगायला नको.

म्हणून काळ्या पानांसाठी अ + ३ ब + क = २६....(१)

आणि लाल पानांसाठी ३ अ + ब + २ क = २६....(२)

अशी दोन समीकरणे आपण मांडू शकतो.

आता ही एकसामायिक (सायमल्टेनिअस्) समीकरणे आपण सोडवू.

समीकरण (१) ला २ ने गुणून ते समीकरण (२) मधून वजा करू.

$$\therefore \; ३ अ + \; ब + २ क = \; २६ \ldots (२)$$

$$२ अ + ६ ब + २ क = \; ५२ \ldots (१)$$

$$- \quad - \quad -$$

$$अ - ५ ब \; = - २६$$

किंवा $$अ = ५ ब - २६ \ldots (३)$$

'अ' आणि 'ब' पानांची संख्या दर्शवीत असल्याने 'अ' आणि 'ब' ची किंमत धन आणि पूर्णांकांत असलीच पाहिजे.

म्हणून 'ब' ची किंमत ६ किंवा त्याहून जास्त असली पाहिजे. 'ब' ची किंमत ६ हून कमी केल्यास 'अ' ची किंमत ऋण होते. हे शक्य नाही.

नंतर समीकरण (१) ची तिप्पट करून त्यातून समीकरण (२) वजा करू.

$$\therefore \; ३ अ + ९ ब + ३ क = ७८ \ldots (१)$$

$$३ अ + \; ब + २ क = २६ \ldots (२)$$

$$- \quad - \quad -$$

$$८ ब + \; क = ५२$$

किंवा $$क = ५२ - ८ ब \ldots (४)$$

या समीकरणातही 'ब' आणि 'क' ची किंमत धन आणि पूर्णांकांत आहे.

म्हणून 'ब' ची किंमत ६ किंवा त्याहून कमी असली पाहिजे. 'ब' ची किंमत ६ हून जास्त असल्यास 'क' ची किंमत ऋण होते. हे शक्य नाही.

परंतु 'ब' ची किंमत ६ हून कमी असू शकत नाही हे आपण अगोदरच वर पाहिले आहे. याचा अर्थ 'ब' ची किंमत केवळ ६ आहे. ती जास्त नाही की कमी नाही.

'ब' ची ६ ही किंमत समीकरण (३) आणि (४) मध्ये घातली असता आपणास अ = ४ आणि क = ४ मिळतात.

आता सारे स्वयंस्पष्ट आहे.

पहिल्या गठ्ठ्यात ४ काळी आणि १२ लाल पाने होती.

दुसऱ्या गठ्ठ्यात १८ काळी आणि ६ लाल पाने होती.

आणि तिसऱ्या गठ्ठ्यात ४ काळी व ८ लाल पाने होती.



४८. चाचणी परीक्षा

वर्गातील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांची सरासरी 'क्ष' होती असे आपण मानू. म्हणजे भप्पीला (क्ष − ५) आणि बीनाला (क्ष + ७) गुण मिळाले होते.

मनूला ७३ गुण मिळालेले होते हे ठाऊकच आहे.

या तिघाही विद्यार्थ्यांच्या गुणांची सरासरी 'क्ष' होती

$$\therefore \frac{(\text{क्ष} - ५) + (\text{क्ष} + ७) + ७३}{३} = \text{क्ष}$$

$$\therefore \text{क्ष} - ५ + \text{क्ष} + ७ + ७३ = ३\,\text{क्ष}$$

$$\therefore २\,\text{क्ष} + ७५ = ३\,\text{क्ष}$$

$$\therefore \text{क्ष} = ७५$$

याचा अर्थ वर्गातील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांची सरासरी ७५ होती.

म्हणून भप्पीला (७५ − ५) = ७० गुण आणि बीनाला (७५ + ७) = ८२ गुण मिळाले होते.

पडताळा $\frac{७० + ७३ + ८२}{३} = \frac{२२५}{३}$

$= ७५$



४९. रक्तचंदनाच्या बाहुल्या

प्रत्येक रक्तचंदनाच्या बाहुलीची किंमत 'क्ष' रुपये होती असे आपण गृहीत धरू. साहजिकच खरेदी केलेल्या बाहुल्यांची संख्या (क्ष + १) असेल.

$$\therefore \text{क्ष}(\text{क्ष} + १) = ८१२$$

$$\therefore \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष} - ८१२ = ०$$

$$\therefore \text{क्ष}^{२} + २९\,\text{क्ष} - २८\,\text{क्ष} - ८१२ = ०$$

$$\therefore \text{क्ष}(\text{क्ष} + २९) - २८(\text{क्ष} + २९) = ०$$

$$\therefore (\text{क्ष} + २९)\ (\text{क्ष} - २८) = ०$$

बाहुल्यांची किंमत ऋण रुपये असूच शकत नाही. म्हणून क्ष = २८. याचाच अर्थ रक्तचंदनाच्या बाहुल्यांची खरेदीची किंमत २८ रुपये होती. म्हणून त्या तीर्थक्षेत्री गोरखनाथाने खरेदी केलेल्या बाहुल्यांची संख्या (२८ + १) म्हणजेच २९ होती.



५०. अपूर्णांकांना संक्षिप्त रूप द्यायची मजेशीर पद्धत

संक्षिप्त रूपे शोधून काढण्यासाठी दत्ताने वापरलेली पद्धत मजेशीर वाटत असली तरी ती मुळीच बरोबर नाही. दत्ताला बरोबर उत्तरे मिळाली हा योगायोग आहे. एरवी ही पद्धत बरोबर नाही. कारण या पद्धतीने

$$\frac{१२}{२४},\ \frac{२८}{८४},\ \text{आणि}\ \frac{६८}{८५}$$

या व्यावहारिक अपूर्णांकांची संक्षिप्त रूपे शोधून काढायचे म्हटले तर ती येतील

$$\frac{१\not{२}}{\not{२}४} = \frac{१}{४},\ \frac{२\not{८}}{\not{८}४} = \frac{२}{४} = \frac{१}{२}\ \text{आणि}\ \frac{६\not{८}}{\not{८}५} = \frac{६}{५}$$

प्रत्यक्षात ती आहेत अनुक्रमे

$$\frac{१}{२}, \frac{२}{३} \text{ आणि } \frac{४}{५}$$

म्हणून संक्षिप्त रूपे शोधून काढण्यासाठी नेहमीच्या पद्धतीचा वापर करावा.

उदाहरणार्थ

$$\frac{२६}{६५} = \frac{२ \times \cancel{१३}}{५ \times \cancel{१३}} = \frac{२}{५}$$

$$\frac{१६}{६४} = \frac{१ \times \cancel{१६}}{४ \times \cancel{१६}} = \frac{१}{४}$$

$$\frac{१९}{९५} = \frac{१ \times \cancel{१९}}{५ \times \cancel{१९}} = \frac{१}{५}$$

$$\frac{४९}{९८} = \frac{१ \times \cancel{४९}}{२ \times \cancel{४९}} = \frac{१}{२}$$



या पुस्तकातील सुंदर व तऱ्हेतऱ्हेची कोडी मुलांची मने नक्कीच रिझवतील. सुरेख चित्रांनी आणि आकृत्यांनी नटली–थटलेली ही कोडी जशी आकर्षक आहेत तशीच ती समजण्यासही अगदी सोपी आहेत. ती इतकी साधी व सोपी आहेत की मोठ्यांच्या मदतीशिवाय देखील सहज सुटतील.

ही कोडी सोडविताना मुले स्वतंत्रपणे विचार करण्यास शिकतील. त्यांच्या विचारांना योग्य दिशा प्राप्त होईल. त्यांचा आत्मविश्वास वाढेल. हसत खेळत त्यांच्या मनात गणिताविषयी आवड तयार होईल आणि त्यांच्या बालमनाचा सहज, सुलभ व सुंदर विकास होईल.

या पुस्तकाखेरीज डॉ. रमेश काणकोणकर यांची 'कोड्यांची जत्रा', कोड्यांचा खजिना', 'कूट रंजन', 'आव्हान कोड्यांचे', 'काड्यांची कोडी' अशी बरीच पुस्तके उपलब्ध आहेत.

ही सर्वच पुस्तकें मुलांना आवडतील, त्यांचे मनोरंजन तर करतीलच पण त्यांच्या बुद्धिची धार प्रखर करतील यात संदेह नाही.